5143

£60

5

Eugenia Maria
Eranto xanna
Bartar Marta
Eranto xanxa

ELEMENTOS
DE
ASTRONOMIA
PARA USO DOS ALUMNOS
DA
ACADEMIA REAL MILITAR
ORDENADO
POR
MANOEL FERREIRA DE ARAUJO GUIMARÃES
Sargento Mór do Real Corpo de Engenheiros, e Lente do quarto anno da referida Academia.

RIO DE JANEIRO.
NA IMPRESSAM REGIA.
ANNO M. DCC. XIV.

J. J. C. O. 1814

Por Ordem de S. A. R.

ADVERTENCIA.

OS presentes Elementos são compilados dos mais célebres Authores, que tem escrito sobre a Astronomia, não só dos apontados na Carta de Lei de 4 de Dezembro de 1810 no tit. 11. §. 4, mas de outros, que consultei, quanto me permittio a brevidade do tempo. A Astronomia Physica de *Biot*, as Obras de *Vince*, de *Mackay*, e outros Astronomos Inglezes fornecerão muitas luzes para este Compendio, o qual me parece conter daquella Sciencia os conhecimentos necessarios a hum Militar. Por tanto he neste ponto de vista que deve pezar-se o seu merecimento.

ERRATAS DA ASTRONOMIA.

Pag.	*Lin.*	*Erros.*	*Emendas.*
3	9*	*v*	*n*
8	7	*aid*	*bid*
ibid.	8	o angulo *iac*	o angulo *ibg*
ibid.	9	*ic*	*ig*
9	10	GO$=90^{\circ}$	QO$=90^{\circ}$
19	19	OZ	OC
30	1	ſe deſpregaráõ	se deſprezaráõ
ibid.	13	$R=\frac{(\&c.)}{ab}$	$R=\frac{(\&c.)^{\frac{1}{2}}}{ab}$
32	7	$\frac{c}{c'}=1-3a(\&c.)$	$\frac{c}{c'}=1-3\alpha(\&c.)$
ibid.	9	$\alpha=\frac{\&c.}{3c(\&c.)}$	$\alpha=\frac{\&c.}{3c'(\&c.)}$
38	14*	da terra	da torre
40	17	$q=$	$p=$
41	1	$1'28'',8$	$1'25'',8$
ibid.	7*	(fig. 16)	(fig. 15)
44	8	*mw*	*nw*
ibid.	12	$=An\times rn$	$=Am\times rn$
45	14	á terra	á tarde
46	15	mo entre ſi	como entre ſi
66	10	$365^{\circ}5^{h}$ &c.	$365^{d}\ 5^{h}$ &c.
73	18	a augmentar-ſe	a aquentar-ſe
77	7*	1,3416	1,03416
ibid.	2*	a menor por expreſsão	a menor terá por expreſsão
78	19	obſervado no apogêo	obſervado no perigêo
ibid.	2*	$59'8''$	$57'11''$
80	6*	augmenta muito	augmenta
85	16*	$r=\frac{\sqrt{(59'11'')}}{v}$	$r=\sqrt{\frac{59'11''}{v}}$
ibid.	13*	difirir	difiriráõ
ibid.	1*	$(59'8'')$	$(57'11'',5)$
87	3*	apogêo	perigêo

Pag.	*Lin.*	*Erros.*	*Emendas.*
94	8	S'	s'
ibid.	10*	os verdadeiros	aos verdadeiros
95	13*	57°7'44'',8	57°17'44'',8
ibid.	8*	E=1°7'36'',5	E=1°55'36'',5
ibid.	6*	$=\frac{1°7'36'',5}{57°4'44'',8}$	$=\frac{1°55'36'',5}{57°17'44'',8}$
97	16	$181^d\ 46'$	$181^d\ 23^h\ 46'$
98	12*	$\frac{21}{168}e^3$	$\frac{21}{128}e^3$
99	2	2°7'31'',7	1°55'31'',656
ibid.	1*	57°7'47'',8	57°17'44'',8
106	4*	56'53'',3	56'53'',7
109	14*	265,24225	365,24225
119	12	a direcção	a duração
ibid.	3*	do como	do Sol como
120	15*	TS'	T S'
ibid.	14*	TQ'	T'Q'
121	6	TP	TP'
122	8	a terra	a orbita
125	7*	2EDB	2DEB
126	12	commum	ſeja commum
143	5	9,16001181	9,6001181
144	16,e 17	*ar.cos.sen.*	*ar.compl.sen.*
146	14	*sen.*(PZ+P*y*−108°)	*sen* $\frac{1}{2}$(PZ+P*y*−108°)
151	11	e a área	reſta área
152	11	$(vS+2vI)\times US$	$(vS+2vI)\times vS$
ibid.	15 adiante da fracção	ponha-ſe	$=cos.HSP$
156	3	*tang.*$\frac{1}{2}$SCF	*tang.*$\frac{1}{2}$SCT
ibid.	20	NSC	SNC
ibid.	21	SCN	SNC
157	2*	$\sqrt{}=$&c.	$=\sqrt{}$&c.
158	10*	(*x*)	(α)
159	6*	1'87''	1'37''
163	13	$13^d\ 14'$	$13^d\ 14^h$

Pag.	Lin.	Erros.	Emendas.
164	2*	SD	SB
166	11	AB	SB
ibid.	13	$44^\circ 240' 4''$	$44^\circ 40' 4''$
ibid.	26	OS = e	OS = $2e$
168	5*	$\frac{BD^2}{4}$ $(\frac{1}{2}BD)^2$	$\frac{BD}{4} = (\frac{1}{2}BD)^2$
170	8*	E*s*	ES
171	16*	e fejão v e q	e fejão v e q (fig. 43)
ibib.	6*	exacto quando	exacto como quando
175	18*	*lva*	*lVa*
190	7	e em Q	e em G
197	10	em m	em m'
200	7*	applicação	oppofição
201	11	SM	aM
202	3*	na oppofição I	na pofição I
204	5*	para a terra	para a lua
207	14	fendo n	sendo u
223	4	dia 6	dia 16
227	2	*sen. a sen. b*	*sen. c sen. b*
ibið.	4	d	D
228	5	horas	annos
236	4	$-r^2$ *fen.*$^2 \frac{1}{2}h'$	$-$*sen.*$^2 \frac{1}{2}h'$
ibid.	8	*cos.*$^2 \frac{1}{2}h$	*cos.*$^2 \frac{1}{2}h'$
239	8	$\frac{1}{2}$L*s*	$\frac{1}{2}$LS
248	7	$1^\circ 8'$S	$10^\circ 8'$S
249	6*	do uzo	do cofeno
ibid.	5*	cofeno da amplitude	feno da amplitude
250	11*	*l.cos.*	*l. fen.*
ibid.	10*	$62^\circ 7'$	$27^\circ 53'$
256	1	Θ'*sen.*Θ	Θ'*cos.*$\odot$
257	6	Θ = &c.	ω = &c.
ibid.	1 e 3*	*cos.*Θ'	*cos.*$\odot$

Notei com o fignal (*) as linhas contadas debaixo para cima, e além difto contei promifcuamente as linhas do texto, e das notas.

ALPHABETO

Para facilitar a leitura dos calculos, em que se faz uso das Letras Gregas.

Α α	. . . .	Alpha.
Β β ϐ	. . . . . .	Beta.
Γ γ ϒ	. . . .	Gamma.
Δ δ	. . . .	Delta.
Ε ε	. . . .	Epſilon.
Ζ ζ	. . . .	Zeta.
Η η	. . . .	Eta.
Θ θ ϑ	. . . .	Theta
Ι ι	. . . .	Iota.
Κ κ	. . . .	Kappa.
Λ λ	. . . .	Lambda.
Μ μ	. . . .	Mi.
Ν ν	. . . .	Ni.
Ξ ξ	. . . .	Xi.
Ο ο	. . . .	Omicron.
Π π ϖ	. . . .	Pi.
Ρ	. . . .	Rho.
Σ σ ς	. . . .	Sigma
Τ τ ⸆	. . . .	Tau.
Υ υ	. . . .	Upſilon.
Φ φ	. . . .	Phi.
Χ χ	. . . .	Chi.
Ψ ψ	. . . .	Pſi.
Ω ω	. . . .	Omega.

ELEMENTOS
DE
ASTRONOMIA.
LIVRO I.
PRINCIPIOS.

CAPITULO I.

Definições.

1. ASTRONOMIA (1) he a *sciencia* + *do movimento dos corpos celestes*. Divide-se em plana ou pura, e em physica. A primeira tem por objecto determinar a grandeza dos corpos celestes, suas distancias, e as orbitas, que elles descrevem; e a segunda examina as causas dos seus movimentos. Aquella tem por guia as observações sobre as grandezas dos astros, e seus

+ fisico-mathema

(1) R. Αςηρ, Astro, νεμος, lei.

+ Fysico-mathematica

movimentos apparentes; eſta ſegue a analogia, applicando os principios e leis do movimento, que governão os corpos ſobre a terra, ou proximos a ella, aos outros corpos do ſyſtema.

2. De todos os phenomenos (1) celeſtes o mais notavel he o movimento diurno, iſto he, o que o Ceo parece ter em 24 horas. Vemos pela *manhã* levantar-ſe o Sol acima das montanhas mais diſtantes, ou ſahir com huma especie de esforço da extremidade do Oceano; eſte phenomeno ſe diz o *naſcer* do Sol. Eſte astro percorre a abobeda celeſte, depois abaixa-se, e deſapparece, ou se *põe* á tarde na parte oppoſta, o que ſe chama o seu *occaſo*. Semelhante marcha ſeguem todos os aſtros: naſcem ſucceſſivamente huns depois dos outros, em huma ordem determinada, correm o Ceo, e depois pela meſma ordem tocão o ſeu occaſo. O lado de que naſcem os aſtros ſe chama Oriente (2), e o oppoſto Occidente (3). Os pontos do mar, ou da terra, em que a viſta ſe limita, formão o *horizonte*, (4) que he o plano, em que os aſtros naſcem e ſe põe, e que por tanto vem a dividir o Ceo em duas partes, huma viſivel, outra inviſivel. Se no lugar do obſervador ſe imaginar hum prumo, prolongando indefinidamente a linha da ſua direcção, o ponto ſuperior, em que ella toca o Ceo, ſe chama (5) *Zenith*, e o inferior *Nadir* (6). Eſtes são os *polos* (7) do *horizonte*.

he o ponto da
... onde o sol
... sobre o horison
... he aquelle ...
... o sol ...
...nte.

---

(1) R. Φαινομαι, apparecer, brilhar.
(2) *Orior*, naſcer.
(3) *Occido*, morrer.
(4) R. Ο'ρίζω, terminar.
(5) R. *Semt* (*Arabe*) ponto; os AA. Arabes dizem *Semt-Ras*, ponto vertical.
(6) *Natheir* (*Arabe*) ſemelhante, ou *Natheir al Semt*, ſemelhante ao Zenit.
(7) πολεῖν, voltar.

3. Para achar a posição de qualquer destes polos, os Astronomos empregão as estrellas. Era por tanto necessario conhecer a sua posição, e representa-las, quer sobre globos, quer sobre cartas. Para este fim, imaginárão desenhar figuras, cada huma das quaes comprehendesse hum numero de estrellas. Derão á figura o nome de *constellação*, ou ajuntamento de estrellas, e designárão estas por letras do alphabeto Grego, ou do Latino, ou ainda por numeros.

4. O polo do Norte he muito facil de achar. Ha no Ceo huma estrella muito proxima a elle, e que por isso tem o nome de *estrella polar*. Como o polo he o ponto fixo, em torno do qual todas as estrellas parecem fazer a sua revolução, ella parece sempre no mesmo lugar, em qualquer hora e em qualquer estação; em quanto todas as outras descrevem circulos em torno da estrella polar, ou do polo.

5. Outro modo de conhecer a estrella polar, seria comparando-a com outras. Ha huma constellação chamada *Ursa maior* (fig. 1.), a que o povo chama *carro de David*, composta de sete estrellas, das quaes quatro figurão de rodas, e tres formão a lança. Tirando huma linha pelas duas estrellas mais distantes da cauda, marcadas na figura por α, β, esta linha prolongada passará muito perto da estrella polar, que dista tanto da estrella α, como esta de υ, que fórma o extremo da cauda. (*a*) A estrella polar está n' hum tempo mais elevada do que a ursa maior, n'outro mais baixa; no primeiro caso a linha, que deve encontrar a estrella polar, deverá prolongar-se para cima da ursa maior, o que acontece quando no principio de Novembro se observa ás 10 horas da noite; no principio de Maio á mesma hora, ver-se-ha a ursa maior no mais alto do Ceo, e prolongar-se-ha para

---

(*a*) A linha tirada por estas duas estrellas passava no 1.° de Janeiro de 1780 a 8′ 24″ da estrella polar, e 1.° 0′ 54″ do polo. *Lallande*.

a parte debaixo a linha , que une as duas eſtrellas precedentes do quadrado da urſa , para encontrar a eſtrella polar ; outras vezes a eſtrella polar eſtará a hum lado ; e a linha , de que fallamos , ſe eſtenderá ou á direita ou á eſquerda da urſa ; mas em todos os caſos , da parte da eſtrella α, ou do meſmo lado da convexidade da cauda, ſe acha a eſtrella polar ; e o polo , que lhe he viſinho.

6. Eſte polo toma o nome de *Arctico* da palavra Grega *Arctos* , que quer dizer *Urſa*. Tambem ſe chama *Septentrional*, alludindo ás ſete eſtrellas, que compõe aquella conſtellação ; Boreal , de Boreas , vento do Septentrião , e vulgarmente ſe diz o *polo do Norte*.

7. Não he igualmente facil marcar o outro polo. *Lallande* , (*Encyclop. Art. Polaire*) citando a *Halley* , diz que não ha eſtrella alguma notavel ſenão em 8.° de diſtancia delle. No planiſferio das eſtrellas auſtraes , conſtruido por *Lacaille* ſe vê huma conſtellação muito perto do polo , a que elle chama *Oitante de reflexão* , mas compoſta de eſtrellas muito pequenas , e de fórma muito irregular. A direcção das duas eſtrellas que formão o *Cruzeiro* não paſſa exactamente pelo polo , e eſtá muito diſtante. Mas o *triangulo auſtral* , que he facil de conhecer, porque he compoſto de tres eſtrellas , que formão hum triangulo quaſi equilatero , póde ſervir para a determinação do polo. Tirando pela eſtrella β (Fig. 2) , e pelo meio do lado oppoſto huma recta , eſta paſſará muito perto do polo , que ſerá então conhecido pela viſinhança de duas pequenas eſtrellas pertencentes á conſtellação do Oitante.

8. Eſte polo tem o nome de *meridional* , ou da parte donde o Sol nos apparece ao meio dia (1), Auſtral de (2) *Auſter* , vento do meio dia , *Antarctico* , ou o oppoſto ao *Arctico* (3) , e vulgarmente *Sul*.

---

(1) *Meridies* , meio dia.

(2) *Auſter* , vento do meio dia.

(3) αντι , contra, defronte, αρκτος , Urſa.

9. Determinado hum deftes pontos, por elle, e pelo centro da terra conduzindo huma recta, e perpendicularmente a efta hum circulo maximo, efte ferá o *equador*, (1) affim chamado, porque quando o Sol toca efte circulo, os dias são iguaes ás noites, como depois veremos. O equador divide o mundo em duas partes ou *hemisferios* (2), diftinctos pelos nomes de *Norte* ou *Sul*, fegundo o polo, que nelle he vifivel.

10. Se fizermos paffar hum plano pelo polo, o *zenith*, e o centro da terra, elle traçará a circumferencia de hum circulo maximo, que ferá o meridiano daquelle lugar; todos os pontos da fuperficie da terra, que tiverem o feu zenith naquella circumferencia, eftaráõ debaixo do mefmo meridiano celefte, e formaráõ naquella fuperficie huma curva, que ferá o meridiano terreftre correfpondente. Da fua conftrucção fe vê que elle he perpendicular ao equador, e ao horizonte. Quando qualquer aftro toca efte circulo, tem feito metade da fua carreira.

11. Ainda que, mudando de lugar, fe tenha novo horizonte, e por confequencia novo zenith, comtudo os polos não mudão, e por eftes pontos invariaveis pafsão todos os meridianos, que vem a fer cortados em duas partes iguaes pelo equador, porém fe achão defigualmente cortados pelos differentes horizontes. A diftancia do polo ao horizonte tem o nome de altura do polo.

12. O meridiano divide o Ceo em dous hemisferios, hum *Oriental*, outro *Occidental*. O primeiro fica da parte donde o Sol parece nafcer, e o fegundo onde fe põe. Tambem he facil achar eftes pontos, conhecido o polo, que fica acima do horizonte, ou o polo elevado; fe voltaffemos a cara para o Sul, o *Oriente* ficaria á efquerda, e o *Occidente* á direita.

---

(1) *Æquator*, que iguala.

(2) Hʹμιςυς, meia, e Σφαιρα, Esfera.

13. O obfervador refere os aftros aos tres circulos, que havemos definido, horizonte, equador, e meridiano. Como eftes começão a fer vifiveis, quando rázão o horizonte, e defapparecem depois de o tocarem outra vez, era natural emprega-lo para determinar a fua elevação, o que fe diz em outros termos, para fe compararem as alturas. Imaginando pelo lugar do aftro, pelo zenith, e pelo centro da terra hum plano, a fua interfecção com a fuperficie da esfera celefte, ferá hum *vertical*, ou perpendicular ao horizonte. O arco defte circulo comprehendido entre o aftro e o horizonte fe chama *altura do aftro*, e o feu complemento fe chama *diftancia do aftro ao zenith.*

14. Todos eftes circulos são *maximos*, ha circulos menores, que tambem tem muito ufo. Confiderando a terra como huma esfera, que gira em torno do feu eixo, os pontos do Equador defcrevem circumferencias de circulos maximos, mas os que eftão mais vifinhos do polo defcrevem circumferencias de circulos, que tem os mefmos polos (Geom. L. VII. prop. 6), mas cujos raios são os fenos dos arcos, que medem as diftancias deffes pontos aos polos, ou os cofenos das fuas diftancias ao Equador. Eftes circulos tem o nome de parallelos ao Equador, ou fimplesmente *parallelos.*

CAPITULO II.

Doutrina da Esfera.

15. HUm obfervador fe imagina no centro de huma esfera concava, na qual eftão fituados os corpos celeftes, e obfervando-os conftantemente, conhece que huma grande parte delles não muda as fuas pofições relativas, nafcendo, e pondo-fe todos conftantemente no mefmo intervallo de tempo, e nos mefmos pontos do horizonte; e eftes tem o nome de *eftrellas fixas*; outros porém, chamados *planetas*, ou *eftrellas errantes*, e juntamente o Sol e a Lua,

mudão conftantemente de pofição, nafcendo e pondo-fe em differentes pontos do horizonte, e em differentes intervallos de tempo. A doutrina da esfera confifte em determinar os tempos do nafcimento e do occaso de todos os corpos celeftes, e achar a sua pofição em qualquer tempo dado, relativamente ao horizonte ou ao meridiano, ou o tempo percorrido depois deffas pofições; as caufas dos differentes comprimentos dos dias e das noites, e a mudança das eftações. E porque o movimento diurno apparente de todos os corpos não depende de fyftema algum particular; antes fe póde explicar, quer fuppondo que elles fazem realmente effe movimento cada dia, quer fuppondo que a terra gira em torno do feu eixo, admittiremos efta ultima hypothefe, da qual depois demonftraremos a verdade.

16. Seja *abdg* (*fig.* 3) a terra, O o feu centro, *a* o lugar do obfervador, ZRNH a esfera das eftrellas fixas, que tem por centro o da terra, fuppofição que não induz a erro pela immenfa diftancia em que ellas eftão, HOR o horizonte, ZRNH o meridiano, Z o zenith, EQ o equador, P, P′ os polos. Se imaginarmos que a terra faz cada dia hum giro em torno do eixo PP′, todos os corpos celeftes parecerão nafcer e pôr-fe naquelle mefmo tempo, e defcrever circulos, cujos planos são perpendiculares ao eixo da terra, e por confequencia parallelos entre fi; porque cada corpo continùa na mefma diftancia do equador, durante a revolução da terra. Por tanto todas as eftrellas parecerão mover-fe diariamente em torno do eixo da terra, como fe eftivessem poftas na fuperficie concava de huma esfera, que tiveffe a terra no centro.

17. Quando queremos determinar a pofição de hum lugar na fuperficie da terra, referimo-lo a dois circulos maximos, perpendiculares entre fi, o equador e o meridiano. Chamamos *latitude* (1) a fua dif-

---

(1) *Latitudo*, Largura.

tancia ao equador, que he medida pelo arco do meridiano comprehendido entre o lugar e o equador, *ag* he a latitude do lugar *a*. A longitude (1) porém he a ſua diſtancia ao meridiano, ou o angulo que o meridiano daquelle lugar fórma com hum meridiano, que ſe tem eſcolhido para termo de comparação, e que ſe chama primeiro meridiano. Se *bid* for o primeiro meridiano, a longitude ſerá o angulo *ibg*, que tem por medida *ig*, iſto he, o arco do equador, comprehendido entre o meridiano do lugar *a*, e o primeiro meridiano.

18. Como os dous circulos *acdf*, ZRNH, são concentricos, o arco *ag* tem o meſmo numero de gráos que EZ, ou (como ſe expressão os Aſtronomos) EZ e *ag* tem a meſma *amplitude*; daqui ſe ſegue que *a latitude he igual á diſtancia do equador ao zenith*. E porque EZ e PR são iguaes (complementos de ZP), *a latitude he igual á altura do polo*. Finalmente, ſendo EZ complemento de EH, fica ſendo *a latitude o complemento da altura do equador*.

19. A fig. 4. moſtra outros circulos, que tambem tem muito uſo: O vertical ZON, que corta o meridiano ZPRH em angulos rectos, ſe chama *primeiro vertical*, e os pontos, em que elle corta o horizonte, ſe chamão *Eſte* e *Oeſte*, aſſim como ſe dizem *Norte* e *Sul* os pontos, em que o meridiano corta o horizonte. Eſtes quatro pontos ſe chamão *Cardeaes*. Se chamarmos P o polo do Sul, R repreſentará eſte polo no horizonte, e H o do Norte. O ponto O ſerá Oeſte, e o oppoſto Eſte. Tiremos hum circulo maximo POP′ perpendicular ao meridiano. Eſta figura repreſenta o meio globo, e todas as linhas repreſentão circulos, e ſe imaginarmos o olho vertical ao meio O da figura, todos os circulos, que paſſarem por eſte ponto pareceráõ rectas. Como os circulos HR, EQ, ZN, PP′ são perpendiculares ao meridiano, o

---

(1) *Longitudo*, comprimento.

polo defte deve eftar em cada hum daquelles ; por tanto a fua interfecção commum O he o polo do meridiano.

20. Tirem-fe os circulos menores *w* H , *mt* , *ae*, *Rv* , *yx* , parallelos ao equador , e porque o circulo maximo POP′ corta em duas partes iguaes EQ em O , cortará tambem os circulos menores *mt* , *ae* , nos pontos *r* e *c* ; porque como EO=90°, *tr* , e *ec* são de 90.° cada hum (Geom. L. 7 p. 6 Cor. 1) ; e como QO=90.°, *mr* e *ac* são cada hum de 90.° ; logo *ac*=*ce* , e *mr*=*rt*.

21. Dá-fe o nome de azimuth ao angulo *RZh* , comprehendido pelo vertical e pelo meridiano , o qual tem por medida o arco do horizonte *hR* comprehendido entre o vertical e o ponto do mefmo horizonte , que reprefenta o polo.

22. O complemento defte angulo fe chama amplitude, que vem a fer o angulo formado no zenith pelo primeiro vertical, e o vertical do aftro ; que por tanto tem por medida o arco do horizonte comprehendido entre o vertical e o ponto d'Eft, ou d'Oeft. O angulo *OZh* , ou o arco Oh , he a amplitude de hum aftro que eftiveffe no vertical *Zoh*.

23. Como todos os corpos celeftes, no feu movimento diurno , defcrevem ou o equador , ou circulos menores parallelos a elle , fe a figura reprefentar o hemisferio do Efte , QE , *ae mt* , reprefentaráõ as paffagens apparentes defde o meridiano abaixo do horizonde , até o meridiano acima do mefmo horizonte e os pontos *b* , O , *s* , são os pontos do horizonte , em que elles nafcem. E porque *ae* , QE , *mt* se cortão em duas partes iguaes em *c* , O , *r* , *eb* ferá maior do que *ba* , QO igual a OE , e *ts* menor que *sm*. Por tanto hum corpo que eftá da mefma parte do equador que o obfervador , eftará mais tempo acima do horizonte do que abaixo, porque *eb* he maior que *ba* ; hum corpo no equador eftará tanto tempo acima como abaixo , porque QO=OE ; e hum corpo na parte contraria eftará mais tempo abaixo do que aci-

ma do horizonte, porque *ms* he maior que *st*. E quanto mais longe *ae* ou *mt* eſtiver do equador, maior ſerá a differença de *ab* para *be*, e de *ms* para *st*, ou o tempo da duração acima ou abaixo do horizonte, e tanto mais longe de O elles hão de naſcer. Os corpos que deſcrevem *ae*, *mt*, naſcem em *b*, e *s*; e como O he o ponto de Eſt do horizonte, e R e H são o Norte, e o Sul, hum corpo que eſtá da meſma parte, que o obſervador a reſpeito do equador, naſce entre Eſt, e Norte, e da parte contraria entre Eſt e Sul, ſe o obſervador eſtiver no hemisferio do Norte; e o contrario acontece eſtando o obſervador no hemisferio do Sul.

24. Quando os corpos chegão a *d* ou *n*, eſtão no primeiro vertical, ou em Eſt; logo hum corpo do meſmo lado do equador que o obſervador chega a Eſt depois do ſeu naſcimento, e no ſentido contrario chega a Eſt antes de naſcer. O corpo que deſcreve o circulo *Rv*, ou outro qualquer circulo mais proximo de P, nunca ſe põe, e eſſes circulos tem o nome de *perpetua apparição*, e os aſtros que os deſcrevem ſe dizem *circumpolares*. O corpo que deſcreve o circulo *wH* he ſó viſivel em H, e no meſmo inſtante deſce para baixo do horizonte, e os corpos que deſcrevem os circulos mais proximos de P′, nunca são viſiveis. Tal he o movimento diurno apparente dos corpos celeſtes, quando o obſervador eſtá entre o equador e qualquer dos polos; o que ſe chama esfera *obliqua*; porque todos os corpos naſcem, e ſe põe obliquamente ao horizonte. Se eſta figura repreſentar o hemisferio Occidental ou de Oeſte, os meſmos circulos *ea*, *tm* repreſentaráõ os movimentos dos corpos celeſtes deſcendo da parte ſuperior do meridiano ſobre o horizonte para a parte inferior. Por tanto hum corpo chega á maior altura ſobre o horizonte quando toca o meridiano, e chega a iguaes alturas quando eſtá equidiſtante do meridiano de huma e outra parte, ſe a diſtancia deſſe corpo ao equador não houver mudado.

25. Se o obſervador eſtiver no equador, E coincidirá com Z, e por conſequencia EQ com ZN, e PP′ com HR (fig. 5): logo, como o equador EQ he perpendicular ao horizonte, os circulos *ace*, *mrt*, parallelos a EQ, são tambem perpendiculares ao horizonte, e como eſtes circulos eſtão ſempre cortados em duas partes iguaes por PP′, ſerão ſemelhantemente cortados por HR. Logo todos os corpos celeſtes eſtão tanto tempo acima como abaixo do horizonte, e naſcem e ſe põe em angulos rectos; pelo que ſe chama *esfera recta*.

26. Se o obſervador eſtiver no polo, então P coincidirá com Z, e por conſequencia PP′ com ZN, e EQ com HR (fig. 6). Por tanto os circulos *mt*, *ae*, parallelos ao equador, tambem são parallelos ao horizonte; logo deſcrevendo cada corpo no ſeu movimento diurno hum circulo parallelo ao horizonte, os corpos fixos no Ceo, que eſtão acima do horizonte, perſiſtirão ſempre ſuperiores, e os que eſtão abaixo ficarão inferiores. Pelo que nenhum corpo pelo ſeu movimento diurno póde naſcer ou pôr-ſe. Chama-ſe a eſta esfera parallela, porque o movimento diurno de todos os corpos he parallelo ao horizonte.

CAPITULO III.

Da immenſidade da esfera celeſte.

27. O Ceo não he eſſa abobeda azul, que nos rodea, e que não he mais do que a atmosfera. O Ceo, que ſe eſtende muito além deſſa pequena camada de ar, he o eſpaço indefinido, em que os aſtros eſtão poſtos. Ora, a qualquer paiz que os viajantes ſe tranſportem, ſempre vêm eſtrellas ſobre as ſuas cabeças; até, ſem ſe mudar de lugar, ſe póde deſcobrir ſucceſſivamente toda a ſerie de eſtrellas no eſpaço de alguns mezes, porque ellas deſapparecem periodicamente, e tornão em certos tempos. Logo o

ſyſtema geral dos aſtros he reintrante ſobre ſi meſmo como hum circulo, e parece cercar a terra circularmente.

28. Mas eſta fórma não he real, e os differentes corpos eſtão em differentes diſtancias da terra, mas eſtas differenças, que o diſcurſo alcança, eſcapão aos ſentidos. Logo, cada obſervador na terra ſe julga no centro de huma esfera infinita, onde colloca todos os aſtros, cada hum na direcção dos ſeus raios luminoſos. A iſto ſe chama *esfera celeſte*. O angulo formado no olho pelos raios viſuaes que tendem a dois aſtros, ſe chama *diſtancia angular*, ou angulo de diſtancia.

29. Por tanto a esfera celeſte não he mais do que huma concepção geometrica para fixar o diſcurſo.

Eſtando cada obſervador no centro da ſua esfera, ha tantos centros de esferas como pontos na ſuperficie terreſtre. Logo as poſições relativas dos aſtros devem parecer differentes aos diverſos obſervadores, ſegundo variarem os pontos de viſta, em que os contemplarem. Iſto, que he notavel ácerca do Sol, da Lua, e dos planetas, ainda que com huma differença infinitamente pequena, não tem lugar ácerca das eſtrellas fixas, porque a terra he tão pequena comparativamente ás ſuas diſtancias, que todos os centros de obſervações ſituadas em ſua ſuperficie ſe podem reputar por hum ſó; de ſorte que a terra toda em comparação deſta diſtancia *ſe póde conſiderar como hum ponto, em roda do qual parece que o Ceo ſe move.*

30. Examinemos a noſſa poſição no eſpaço. Todos os aſtros parecem girar circularmente em roda da terra em virtude do movimento diurno. Se a terra não eſtiveſſe no centro deſta rotação, as diſtancias angulares das eſtrellas deverião parecer maiores em certos paizes do que em outros, ſegundo os obſervadores eſtiveſſem voltados para a parte mais proxima do Ceo, ou para a mais remota (Veja-ſe fig. 7). Ora,

em todos os lugares da terra, estas distancias são as mesmas, quando os astros estão na mesma altura; logo o centro da terra he tambem o centro da rotação diurna, ou pelo menos se póde considerar como tal.

31. Procuremos agora estabelecer alguma comparação entre as dimensões da terra, e a distancia dos astros. Se medirmos com hum instrumento o diametro horizontal do Sol ao nascer, e o tornarmos a medir, quando estiver no ponto mais alto do arco que elle descreve, não acharemos differença alguma consideravel. Todavia, o Sol está mais perto do observador no zenith do que no horizonte; porque a flécha OZ (fig. 8) he menor do que a semi-corda OH. A differença he quasi igual ao raio OC da terra (*), porque se pelo centro C da terra e da esfera celeste tirarmos hum diametro ACB parallelo a HO*h*, o pequeno arco HA será quasi huma linha recta parallela e igual a OC, por consequencia a distancia OH será

(*) O calculo mostra isto mesmo, porque se chamarmos r o semidiametro OC da terra, R o raio CH ou CZ, tirado do centro desta ao do Sol, a linha OH será igual a $\sqrt{(R^2 - r^2)}$; a flécha $OZ = R - r$; e a differença destas duas será expressas por

$$\sqrt{(R^2 - r^2)} - (R - r).$$

Suppondo r muito pequeno a respeito de R, e extrahindo proximamente a raiz pelo binomio de *Newton*, parando no quadrado de r, teremos por expressão da raiz $R - \frac{r^2}{2R}$. Logo a differença de OH e OZ será $r - \frac{r^2}{2R}$; isto he quasi igual a r.

quaſi igual ao raio CA ou CZ, e a differença entre OH e OZ ſerá quaſi igual a OC. Logo o diſco do Sol, viſto de mais perto, deveria parecer maior no zenith do que no horizonte (*). Se eſte augmento eſcapa ás obſervações, iſto prova que o diametro da terra he ſummamente pequeno comparativamente á diſtancia deſte aſtro.

32. Não acontece o meſmo á Lua. O ſeu diametro transverſal he realmente maior no zenith que no horizonte; e a differença chega a hum ſeſſenta-avo. A differença da ſua diſtancia produz hum effeito ſenſivel na diſtancia total. Logo a lua eſtá muito mais perto da terra do que o Sol.

33. Os oculos aſtronomicos moſtrão iſto meſmo. Elles augmentão hum objecto, por exemplo o Sol ou a lua, 1000 vezes, e mais. Applicando-os ás eſtrellas, ellas parecem pontos luminoſos: o que moſtra que ainda ſendo viſtas em huma diſtancia mil vezes menor, eſtarião em huma diſtancia immenſa.

34, Os conhecimentos aſtronomicos confirmão eſta verdade. Conſeguio-ſe medir a diſtancia do Sol á terra, igual a 23405 vezes o raio da terra; deſcobrio-ſe meio de fazer entrar eſta diſtancia como unidade para medir a diſtancia das eſtrellas, e achou-ſe tão pequena que não podia ſer contada ſenão como hum ponto. Se a diſtancia das eſtrellas foſſe ſó 5000000000 de vezes o raio da terra, poder-ſe-hia determinar pelos methodos actuaes da aſtronomia; mas como ainda ſenão pôde conſeguir, he certo que eſtes aſtros eſtão muito mais longe. Eſte limite baſta para que os raios viſuaes tirados dos differentes pontos da terra a huma eſtrella ſe poſsão conſiderar como parallelos.

35. Aſſim, quando hum obſervador, poſto na ſuperficie da terra, por exemplo em O (fig. 9) olha

(*) *Optica*, n.° 78.

Os objectos expostos do mesmo modo á vista parecem diminuir de grandeza á medida que se apartão do nosso ôlho.

para as ēſtrellas ſituadas nas extremidades do horizonte, vê-as do meſmo modo que ſe eſtiveſſe no centro da terra, e as obſervaſſe na direcção CA ou CB. Por iſſo ſe diſtinguem na aſtronomia dois horizontes: o primeiro, que he o horizonte ſenſivel, paſſa pelo olho do obſervador, e ſe eſtende ſobre a ſuperficie da terra; o ſegundo, que he parallelo ao precedente, paſſa pelo centro da terra, e ſe chama horizonte racional.

CAPITULO IV.

Do movimento geral dos aſtros.

36. PArece á primeira viſta que o Ceo ſe divide em duas porções, que apparecem ſucceſſivamente ſobre o horizonte, das quaes o Sol occupa huma, e os demais aſtros a outra. Para conhecermos eſte erro, obſervemos o Ceo ao romper do dia. As eſtrellas ao Oriente, lanção apenas huma luz fraca; em quanto as do Occidente brilhão ainda com todo ò ſeu eſplendor. O contrario acontece á tarde depois do Occaſo do Sol; as eſtrellas do Occidente tem huma luz fraca, e as do Oriente são já muito brilhantes. Iſto moſtra que a exceſſiva viveza da luz do Sol he que nos embaraça de vermos as eſtrellas á ſimples viſta. Eſta verdade ſe confirma tambem por huma obſervação immediata; ſe notarmos pela manhã o planeta *Venus*, quando apparece antes de naſcer do Sol, e eſtá no ſeu maior eſplendor, poderemos ſeguilo, e vê-lo no Ceo todo o dia, e em todo o tempo ſe percebem eſtrellas, com hum oculo aſtronomico, ainda em alto dia.

37. Iſto explica outro phenomeno, que parece ſingular. Se obſervarmos o Sol muitos dias ſucceſſivos, proximo ao ſeu occaſo; e quando eſtiver já debaixo do horizonte, examinarmos as eſtrellas que o ſeguem, e que ſe põe immediatamente depois delle; no cabo de alguns dias, não as veremos mais; outras eſ-

trellas que os dias precedentes tocavão o horizonte muito depois do Sol, agora o ſeguem e ſe põe com elle. Parece por tanto que eſte aſtro ſe adianta para as eſtrellas, em ſentido contrario do movimento geral; iſto he do Occidente para o Oriente. O meſmo ſe obſerva pela manhã alguns inſtantes antes de naſcer o Sol. Comparando do meſmo modo as poſições ſucceſſivas dos planetas com as eſtrellas que ſe encontrão no ſeu giro, ſe conhece que o movimento proprio deſtes aſtros he geralmente dirigido do Occidente para o Oriente, como o do Sol.

38. Eſtas conſiderações nos obrigão a diſtinguir nos aſtros duas eſpecies de movimentos. O primeiro he o movimento geral, em virtude do qual o Sol, a Lua, e todos os aſtros naſcem de huma parte do horizonte, e ſe põe do lado oppoſto. Eſte he o movimento *diurno* ou diario. Quando o obſervador tem a cara voltada para o Norte no hemisferio do Sul, eſte movimento ſe faz da eſquerda para a direita.

39. Diſtinguiremos depois os movimentos particulares e mais lentos, em virtude dos quaes os planetas mudão cada dia o lugar do ſeu naſcimento, e occaſo, aſſim como as ſuas poſições relativamente ás eſtrellas fixas. Eſtes *movimentos proprios* ſe fazem do Occidente para o Oriente, iſto he, da eſquerda para a direita, voltando a cara para o Norte.

40. O circulo maximo, que o Sol parece deſcrever no decurſo de hum anno, ſe chama *ecliptica* (*a*). Elle não coincide com o equador, porque em todo o tempo do ſeu giro ſó duas vezes ſe acha neſte circulo. A ecliptica ſe divide em 12 partes, ou ſignos, que tomão o nome da conſtellação, que nelle ſe acha, e são no ſentido do movimento do Sol as ſeguintes.

(*a*) R. Ἐκλείπω faltar, porque ſempre que ha eclipſe, a Lua eſtá na ecliptica ou muito perto.

♈,	♉,	♊,	♋,	♌,	♍,
Aries,	Tauro,	Gemini,	Cancer,	Leo,	Virgo,
♎,	♑,	♐,	♏,	♒,	♓,
Libra,	Scorpio,	Sagitario,	Capricornio,	Aquario,	Piſces.

41. Os pontos, em que a ecliptica corta o equador, ſe chamão *equinociaes*, e o tempo em que o Sol a elles chega *equinocio*.

O primeiro ponto de *Aries* coincide com hum dos pontos equinociaes, e o de *Libra* com o outro. Os ſeis primeiros ſignos ſe chamão *Boreaes* ou do *Norte*, os outros *Auſtraes* ou do *Sul* (*). O ajuntamento deſtes ſignos fórma o *Zodiaco*, palavra, que vem do Grego ζωον, que quer dizer animal, pelos que ſe pintavão neſta facha para repreſentar as conſtellações.

42. A diſtancia de hum aſtro ao equador, medida por hum arco de circulo maximo, que paſſa pelo aſtro e pelos polos, ſe chama declinação, e ſe diſtingue em Norte ou Sul, ſegundo a parte de que o aſtro eſtá. O arco do equador comprehendido entre o circulo de declinação e o primeiro ponto de Aries, ſe diz *Aſcensão recta*. Eſta ſe mede ſegundo a ordem dos ſignos.

43. Seja agora COL (fig. 5) metade da ecliptica, ou metade do movimento annuo apparente do Sol; C o primeiro ponto de Capricornio; L o de Can-

(*) Os ſignos forão deſignados pelas doze conſtellações, que occupavão as doze porções do Zodiaco ha dois mil annos. Mas por cauſa da *preceſsão dos equinocios*, de que depois fallaremos, as conſtellações tem mudado de maneira, que a conſtellação de *Aries* eſtá agora no ſigno de *Tauro*; a de *Tauro* no ſigno de *Gemini*, &c.

cer; como a ecliptica he hum circulo maximo, ha de cortar o equador em duas partes iguaes. Por tanto, como o movimento apparente do Sol he fenfivelmente uniforme, o Sol eftá quafi tanto tempo de hum lado do equador como do outro (V. fig. 4). Quando por tanto o Sol eftá em *q* da mefma parte do equador ácerca do obfervador, defcrevendo pelo feu movimento diurno o parallelo *ae*, os dias são maiores do que as noites, e elle nafce em *b* ao Sul do ponto de Eft; mas quando eftá da parte contraria em *p*, defcrevendo *mt*, os dias são mais breves do que as noites, e o Sol nafce em *s* ao Norte do ponto de Eft, quando o efpectador eftá ao Sul do equador; mas quando o Sol eftá no equador, em O, defcrevendo QE, os dias são iguaes ás noites, e nafce no ponto d'Eft, O. Se *ae*, *mt*, forem equidiftantes de EQ, então $be = ms$, e $ab = st$; por tanto quando o Sol eftá naquelles parallelos oppoftos, o comprimento do dia em huma parte, he igual ao comprimento da noite em outra; logo o comprimento medio de hum dia em cada lugar he de 12 horas. Donde fe fegue que em cada lugar, o Sol no decurfo de hum anno eftá metade do tempo acima, e metade abaixo do horizonte (*).

44. Tambem he claro que os dias crefcem defde que o Sol fe aparta de C, principio de Capricornio, até que chega a L, principio de Cancer, e decrefcem defde efte ponto até o primeiro. Quando o obfervador eftá no equador, como o Sol defcreve em

(*) Ifto não he rigorofamente verdade, porque o movimento do Sol na ecliptica não he perfeitamente uniforme, e por efte motivo não eftá exactamente tanto tempo de huma parte do equador como da outra. Se o eixo maior da orbita da terra coincidiffe com a linha, que une os pontos equinociaes, os tempos ferião iguaes.

p e *q* os circulos *mt*, *ae*, pelo ſeu movimento diurno apparente, e eſtes são cortados em duas partes iguaes pelo horizonte, o Sol eſtá ſempre tanto tempo acima como abaixo do horizonte, e por conſequencia os dias e as noites tem ſempre 12 horas. Todavia haverá as meſmas variedades de eſtações, ſegundo o Sol ſe affaſtar de 23° 28′ para cada lado do obſervador. Neſta ſituação do obſervador, elle terá o Sol perpendicular quando eſtiver no equador. E quando o obſervador eſtiver entre os tropicos, o Sol lhe ſerá perpendicular ao meio dia, quando a ſua declinação, ou a ſua diſtancia ao equador for igual á latitude do lugar, e da meſma natureza, iſto he, ambas Norte, ou ambas Sul. Quando o obſervador eſtá no pólo (fig. 6), o Sol em *p* e *q* faz o ſeu movimento diurno nos circulos *mpt*, *aqe*, parallelos ao horizonte; por tanto nunca ſe põe em quanto eſtá daquella parte OL da ecliptica, acima do horizonte, nem naſce em quanto eſtá da parte debaixo OZ. Por conſequencia he dia metade do anno, e noite a outra metade. Como o Sol illumina metade da terra (*), ou 90° em torno do ponto a que he vertical, quando eſtá no equador, illumina até cada pólo; quando eſtá ao Norte do equador, o pólo do Norte fica dentro da parte allumiada; e o do Sul na eſcura. A variedade das eſtações provém por tanto de que o eixo da terra, que coincide com PP′, não he perpendicular ao plano da ecliptica LOC; porque ſe o foſſe, a ecliptica e o equador coincidirião, e o Sol eſtaria ſempre no equador, e por conſequencia nunca mudaria a ſua poſição ácerca da ſuperficie da terra. Se (fig. 4) QR = EH = 23° 28′, a maxima declinação; então, que he o dia mais comprido, o Sol deſcreve o parallelo

(*) Iſto não he exactamente verdadeiro, porque ſendo o Sol maior do que a terra, allumia mais de 90° huma quantidade proximamente igual ao ſeu ſemi-diametro apparente em ſegundos. Opt. n.° 39.

Se um globo luminoso illuminar um globo escuro menor que elle, a parte illuminada tanto menor e a parte da superficie

Rv, que tocando exactamente o horizonte em R, moſtra que elle não deſce aquelle dia abaixo do horizonte; e por tanto o dia dura 24 horas. Mas quando o Sol chega á ſua maxima declinação do outro lado de EQ, deſcreve wH, e por conſequencia 24^h não ſóbe acima do horizonte; iſto he, a noite dura 24^h. Iſto acontece quando EH, complemento de EZ (latitude) he de $23^{\circ}\ 28'$, ou na latitude de $66^{\circ}\ 32'$. Se EH, complemento da latitude, for menor do que $23^{\circ}\ 28'$, o Sol eſtará acima do horizonte no verão, e abaixo no inverno, mais de 24^h, e tanto mais tempo, quanto mais nos chegarmos ao pólo, onde, como já notámos, eſtará 6 mezes acima, e ſeis mezes abaixo do horizonte. As orbitas dos planetas e da lua, tambem são inclinadas ao equador, como ſe conhece, marcando o ſeu movimento pelas eſtrellas fixas; por tanto no tempo, em que qualquer faz huma revolução na ſua orbita, terão lugar as meſmas apparencias que no Sol. O movimento annuo apparente do Sol, e o movimento real da lua e dos planetas, he d'Oeſt para Eſt, e por tanto contrario ao ſeu movimento diurno apparente.

45. Os circulos polares e os tropicos repartem a terra em 5 fachas, que ſe chamão *zonas*. A que fica comprehendida entre os dois tropicos, tem o Sol ſempre a prumo. O calor he exceſſivo, e por iſſo ſe chama *torrida*, iſto he, *queimada*. Alli he que a natureza deſenvolve todas as ſuas riquezas; os animaes, as plantas, e as meſmas ſubſtancias inorganicas, são dotadas das mais vivas cores.

46. Pelo contrario as regiões comprehendidas dos pólos até os circulos polares ſempre vêm o Sol muito obliquo. Tem longos intervallos de dias e de noites, e no pólo ha ſó hum dia de 6 mezes. O frio naquelles paizes he exceſſivo; são eſtereis e quaſi inhabitaveis, ainda meſmo da parte do pólo boreal. Chamão-ſe *zonas glaciaes* ou *frigidas*.

47. Os paizes, como a Europa, entre os tropicos e os circulos polares, que não recebem o Sol nem muito obliquo, nem muito pouco, e que não eſtão expoſtos a longas alternativas de dia e de noite, conſervão huma temperatura media, que lhe mereceo o nome de *zonas temperadas*.

48. Até aqui conſiderámos o movimento dos corpos celeſtes no hemisferio Oriental; mas ſe eſta figura repreſentar o hemisferio d'Oeſt, applicar-ſe-lhe-ha igualmente todo o raciocinio. Os corpos gaſtaráõ tanto tempo em deſcer do meridiano ao horizonte, como em ſubir do horizonte ao meridiano: os arcos deſcritos ſerão ſemelhantes; e elles ſe porão na meſma ſituação relativamente a Oeſt, em que naſcem relativamente a Eſt; iſto he, ſe hum aſtro naſce ao Norte ou ao Sul d'Eſt, por-ſe-ha na meſma diſtancia d'Oeſt para o Norte ou para o Sul.

CAPITULO V.

Da figura da terra.

49. EXaminemos agora a figura e os limites do Oceano, que cerca a terra por toda a parte, e parece fazer com ella hum ſó todo. A ſua ſuperficie não he chata, como julgariamos á ſimples viſta; he ſenſivelmente convexa. Quando os navegantes ſe affaſtão da coſta, vêm os edificios e os montes abaixarem-ſe pouco a pouco, e finalmente deſapparecerem. Eſte effeito não provém da diſtancia, que faz parecer os objectos mais pequenos, porque quando ſe perde de viſta a terra da tolda, ella he ainda viſivel dos váos. Neſte tempo o navio offerece os meſmos phenomenos aos que ficão em terra. Elles o vêm abaixar pouco a pouco, e finalmente ſumir-ſe como mergulhando-ſe no Oceano, e exactamente da meſma maneira que o Sol no ſeu occaſo. Eſtes phenomenos, que ſe obſervão conſtantemente, provão com eviden-

cia que a ſuperficie do Oceano he convexa, e nos eſconde pela ſua redondeza os objectos diſtantes. Se eſta ſuperficie foſſe plana, huma montanha levantada acima della, ſe aviſtaria de todas as partes, ſalvo ſe os obſervadores eſtiveſſem tão longe, que as dimensões da montanha foſſem inſenſiveis em razão da diſtancia. Mas iſto ſó aconteceria em huma diſtancia muito conſideravel, e os objectos que ſe perdeſſem de viſta da tolda, nem por iſſo ſe perceberião melhor dos váos.

50. Por tanto o horizonte do mar, que parece terminar a ſua ſuperficie, não he hum limite real, mas ſomente relativo á poſição do obſervador. Os navegantes, que vemos partir dos portos, nos parece que paſsão aquelle limite; mas o ſeu horizonte os precede ſempre, e parece recuar diante delles. Fôra importante reconhecer, o que vem a ſer aquella barreira apparente, avançando ſempre para ella, e andando no meſmo ſentido. Eſtava reſervada a hum *Portuguez* eſta empreza atrevida. *Fernando de Magalhães* embarca em hum dos portos de *Heſpanha*, (*) e dirige-ſe para o Occidente. Depois de longa viagem, encontra o Continente da *America*, corre aquella coſta, chega ao ſeu extremo, dobra-o, e ſe acha em hum grande mar já conhecido, que he o *Mar do Sul*. Continúa a ſua derrota para o Occidente, aporta ás Ilhas *Molucas*, e o ſeu navio, aproado ſempre ao Occidente, torna á *Europa*, e chega, como ſe vieſſe do Oriente, ás Coſtas, donde ſahira.

51. Eſta grande experiencia, repetida depois por

(*) *Biot* diz: *de Portugal*: o que ſem duvida he erro; elle ſahio de *Sevilha* a 10 de Agoſto de 1519 no navio *Victoria*, e foi morto em Abril de 1521 em huma das *Philippinas*; hum dos navios da ſua frota chegou a *S. Lucar* a 7 de Setembro do 1522. *Drake* foi o ſegundo que tentou ſimilhante viagem: ſahio de *Plymouth* a 13 de Dezembro de 1577 com 5 navios, e chegou ao meſmo lugar a 26 de Setembro de 1580.

muitos navegantes, prova que a ſuperficie total das agoas e da terra he convexa, reintrante ſobre ſi meſma, e não eſtá pegada com o Ceo de parte alguma; porque em qualquer paiz ſe vêm do meſmo modo os aſtros girarem em roda da terra em virtude do movimento diurno.

52. Eſtes reſultados moſtrão ſó a redondeza da terra em hum ſentido, do Occidente para o Oriente; ella he igualmente ſenſivel do Norte ao Sul. Quando partimos de hum lugar da terra, e nos adiantamos para o Sul, vemos as eſtrellas ſituadas naquella parte do Ceo levantarem-ſe cada vez mais acima do horizonte: os arcos que ellas deſcrevem pelo movimento diurno são maiores. Começão a apparecer algumas, que não ſe aviſtavão no paiz, de que partimos. Pelo contrario, as eſtrellas ſituadas ao Norte ſe abaixão; as que deſcrevião arcos muitos baixos deſapparecem, e ſe ſomem no horizonte, exactamente como nas viagens maritimas os edificios e os montes deſapparecem, e ſe ſomem á medida que nos affaſtámos das coſtas. Mudando aſſim de lugar ſobre a terra, e caminhando ſempre do Norte para o Sul, ou do Sul para o Norte, ſe póde de alguma ſorte mudar de Ceo. Logo eſtes phenomenos nos moſtrão a convexidade da terra no ſegundo ſentido.

53. He por eſta razão que os pontos mais levantados, como o cume dos montes, e o vertice das torres, recebem primeiro de manhã a luz do Sol, e á tarde são allumiados pelos ſeus ultimos raios. Por huma conſequencia neceſſaria, quando eſte aſtro ſe põe para certos paizes, apparece no mais alto ponto da ſua carreira para lugares mais ao Occidente, e naſce para outros, que eſtão ainda além daquelles.

54. Os eclipſes da Lua moſtrão de hum modo ainda mais ſenſivel que a terra he redonda. Quando eſte aſtro começa a entrar na ſombra da terra, e huma parte do ſeu diſco eſtá ainda allumiada pelo Sol, eſta parte não parece terminada por huma linha recta, como deveria acontecer, ſe o contorno da ſombra terreſtre

foſſe rectilineo; eſte diſco tem a figura de hum creſcente luminoſo concavo para a parte da ſombra. O meſmo acontece no fim do eclipſe, quando a Lua começa a deſembaraçar-ſe da ſombra terreſtre.

55. Ajuntando ao reſultado deſtas obſervações o que nos tem enſinado as viagens maritimas, podemos concluir com certeza que *a terra e as agoas formão huma maſſa redonda em todos os ſentidos, e iſolada no eſpaço.*

56. Eſta conclusão parece difficil de comprehender, porque impropriamente generalizamos a idéa da gravidade, que notámos nos corpos ſituados na ſuperficie da terra. O que a experiencia nos moſtra he huma tendencia geral de todos os corpos para a terra; e não ſe ſegue daqui que tambem a terra deva tender para hum certo ponto do eſpaço. Por tanto os phenomenos da gravidade não enfermão a noſſa conclusão.

57. Ainda mais. Como a terra he redonda, os differentes povos, que a habitão, tem a cabeça voltada para differentes pontos do Ceo. Alguns ha, que nos são inteiramente oppoſtos, e cujos pés eſtão contra os noſſos; por eſte motivo ſe chamão *antipodas* (*).

58. Provada a convexidade da terra, reſta determinar a fórma da ſua curvatura. Eſte exame parece impraticavel, attendendo ás irregularidades da ſuperficie da terra, cortada por tantos rios, montes, e valles. Mas eſtas deſigualdades são em extremo pequenas, quando ſe comparão com as dimensões totaes da terra. Com effeito, o mais alto monte, que ſe conhece, he *Chimboraço* (no *Perú*), que tem de alto 2840 braças, pouco mais de huma legoa maritima. O diametro da terra contém perto de 2292 deſtas legoas. Aſſim repreſentando o globo terreſtre por huma bola de 8 pés de diametro, o *Chimboraço* repreſentaria a elevação de $\frac{1}{2}$ linha.

(*) R. αντι, contra, πυς, pé.

59. Sendo a terra convexa em todos os ſentidos, a hypotheſe mais ſimples he ſuppô-la esferica, vejamos pois ſe temos caracteres deciſivos, que verifiquem as conſequencias deſta hypotheſe.

60. A convexidade da terra faz que as perpendiculares tiradas aos diverſos pontos da ſua ſuperficie, não ſão parallelas; convergem para o ſeu interior. Se cruzaſſem todas no meſmo ponto, a terra ſeria esferica; e em geral a maneira, com que ellas ſe inclinão, moſtra a ſua curvatura. Porque, ſe concebermos huma recta flexivel AB (fig. 10) á qual ſe tirem muitas perpendiculares Pp, $P'p'$, $P''p''$ aos pontos M, M', M'', em quanto eſta linha for recta, as perpendiculares ſerão parallelas entre ſi; mas ſe vier a curvar-ſe, como na fig. 11, as perpendiculares ſe chegarão humas para as outras no interior da curva; affaſtar-ſe-hão da parte oppoſta; e eſta mudança de direcção ſerá tanto mais ſenſivel, quanto mais convexa for a curvatura. Logo he muito neceſſario determinar a direcção deſtas perpendiculares ácerca da ſuperficie da terra. Ellas são indicadas em cada lugar pela direcção, que tomão os corpos graves em virtude da acção livre da gravidade. Para conhecer por experiencia eſta direcção, ſuspende-ſe hum pezo no extremo inferior de hum fio, do qual ſe prende a outra ponta. Eſte fio ſe dirige ſegundo huma linha perpendicular á ſuperficie terreſtre, que ſe chama *vertical*.

61. Como todas as verticaes convergem para o interior da terra, as ſuas direcções são differentes, mas eſta differença não he conſideravel em lugares pouco diſtantes, e nelles as direcções do prumo são ſenſivelmente parallelas. O que reſulta de fazerem entre ſi hum angulo muito pequeno; porque a convexidade da terra não póde ſer ſenſivel em tão pequeno eſpaço.

62. Em conſequencia deſta convexidade, á medida que nos elevarmos ſobre a ſuperficie terreſtre, devemos deſcobrir maior parte della, e os raios viſuaes

4

tirados aos extremos do horizonte, deveráõ inclinar-se cada vez mais sobre a vertical; o que he conforme á experiencia. Se nos levantarmos em hum balão, ou subirmos a huma alta montanha, da qual se descubra o mar (fig. 12), e medirmos a inclinação dos raios visuaes tirados aos extremos do horizonte, acharemos que he por toda a parte a mesma. Logo todos os pontos do horizonte parecem igualmente abaixo do observador, o que confirma a supposição de ser a terra sensivelmente esferica.

63. Mas, sendo a terra esferica, as direcções das verticaes a encontrarião no centro, e todos os arcos de igual amplitude serião iguaes. Restava pois medir alguns gráos da superficie da terra em differentes latitudes, e comparar as suas grandezas. O primeiro gráo foi medido entre *Londres* e *York* por *Norwood* em 1635, e achou-se de 367200 pés Inglezes, medida excessiva (*), e que as ultimas observações mostrão maior em 17 toezas. *Picard* em 1669 medio o gráo entre *Paris* e *Amiens*, e depois delle outros desempenhárão esta ardua commissão. Mas cumpre primeiro explicar com *Lallande* o que se entende por gráo do esferoide terrestre.

64. He hum principio de hydrostatica que a gravidade obra perpendicularmente á superficie da terra, qualquer que seja a sua figura; logo o prumo, a que referimos as alturas dos astros, he perpendicular á superficie da terra, e se hum observador, em P (fig. 13) por exemplo em *Paris*, vir huma estrella como a *clara de Perseu*, passar pelo meridiano exactamente no zenith, vê-la-ha na direcção BPZ, perpendicular á superficie da terra, e que não se dirige ao centro C, senão no caso de ser a terra esferica. Outro observador em A, por exemplo em *Amiens*, vê a mesma estrella na direcção do raio AS,

(*) V. *The seaman's practice.*

parallelo a PZ em razão da grande diſtancia ; eſta eſtrella parece affaſtada da vertical XAB a quantidade angular SAX. Se com inſtrumentos exactos acharmos que a clara de Perſeu paſſa a hum gráo do zenith de Amiens, ſegue-ſe que o angulo SAX he de hum gráo ; por tanto o angulo PBA=SAX, ſerá tambem de hum gráo ; e neſte caſo diremos que o arco AP da terra, comprehendido entre Paris, e Amiens, he hum gráo da terra ; donde reſulta a definição ſeguinte.

65. *O grão do esferoide terreſtre (qualquer que ſeja a ſua figura) he o eſpaço, que ſe deve percorrer ſobre a terra, para que a linha vertical mude hum gráo*, Donde ſe ſegue que os gráos, que medimos por obſervação, são os angulos B, que não tem o vertice no centro da terra, mas no ponto de concurſo das verticaes ZPB e XAB, perpendiculares á terra em P e A, iſto he nos extremos do gráo.

66. Segue-ſe deſta definição que nos lugares mais achatados, os gráos devem ſer maiores, por huma razão muito clara : quanto maior for a convexidade, ou curvatura do arco PA (fig. 14), ſendo o angulo F de hum gráo, tanto menor ſerá eſſe arco PA ; ſe em lugar de PA tomarmos PD, mais convexo e mais curvo que PA, ſendo DG parallelo a AF, e o angulo PGD de hum gráo, bem como PFA, eſte arco PD ſerá mais curto, ainda que tenha a meſma amplitude, e o ſeu comprimento em braças ſerá menor do que o de PA. Na ellipſe, e em todas as curvas analogas, a curvatura he maxima no vertice do eixo maior, e minima no vertice do eixo menor ; logo, ſe a terra for achatada nos pólos, o arco de hum gráo terá mais comprimento á medida que nos chegarmos para os pólos, onde he maximo o achatamento (*).

(*) A toeza que ſervio aqui de unidade de comprimento he a que ſervio na medida do *Perú* refe-

67. Consideremos agora as medidas mais exactas.

Lat.med.	Lugares.	Comprim.	Authores.	Arc.medid.
o	*Peru.*	56753^t	*Bouguer* e *Condamine.*	3°,1188
33°,3084	*C.Boa Esperanç.*	57040	*La Caille.*	1,2215
39,2	*Pensilvan.*	56888	*Mason* e *Dixon.*	1,4791
43,0167	*Italia.*	56973	*Boschovich* e *Maire.*	2,1631
46,1994	*França.*	57018	*Delambre* e *Mechain*	9,6738
47,7833	*Austria.*	57086	*Liesganig.*	2,9461
66,3333	*Laponia.*	57419	*Clairaut, Mapertuis*, e outr.	0,9580

68. As medidas dos gráos, feitas no hemisferio boreal, provão que os meridianos terrestres não são circulos. Até he provavel que as duas metades de huma e de outra parte do equador não são exactamente similhantes. O gráo medido no Cabo da Boa Esperança na latitude de 33° Sul se achou maior do que o de França na latitude de 46° Norte.

---

rida á temperatura de 16° $\frac{1}{4}$ do thermometro de mercurio dividido em 100° desde o gelo até a agoa fervendo debaixo de huma pressão equivalente á de huma columna de mercurio de 3454,54 braças de alto. (*Biot*). Segundo *Lallande*, deve ser na temperatura de 10° do thermometro de *Reaumur*, e 54 $\frac{1}{2}$ de *Fahrenheit*, e para cada gráo do thermometro acima de 10° se deve accrescentar ao gráo medido 0,97^t. *Astron.* L. 15 n. 2652-4.

69. Engeitada a figura esferica, ſeguia-ſe conſiderar a terra como hum ellipſoide, hypotheſe que a theoria abonava, ſuppondo a terra primeiro fluida, e endurecendo ſem perder a ſua figura primitiva. Mas a comparação dos gráos medidos deu para a figura dos meridianos ellipſes differentes, e que ſe affaſtão muito das obſervações.

70. Supponhamos com effeito que a terra he hum ellipſoide de revolução; então todos os ſeus meridianos ſerão ellipſes, que terão por eixo maior o do Equador, e por eixo menor o dos pólos. Repreſentando o primeiro por a, e o ſegundo por b, e chamando x, y as coordenadas, a equação dos meridianos ſerá

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

O ſeu raio de curvatura R terá por expreſsão

$$R=\frac{(a^4-x^2(a^2-b^2))^{\frac{3}{2}}}{a^4b},$$

e arcos muito pequenos medidos ſobre os meridianos, ſe poderáõ conſiderar como pertencendo ao circulo oſculador, cujo raio he R.

71. As obſervações não fazem conhecer a abſciſſa x, mas póde-ſe deduzir da latitude, quando for conhecido o raio tirado do centro do eſferoide ao ponto que ſe conſidera conhecido; porque chamando r eſte raio, e φ a latitude, ou o angulo formado pelo eixo maior com r, temos $x=r\cos\varphi$, o que dá

$$R=\frac{(a^4-r^2(a^2-b^2)\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}.$$

72. Supponhamos agora $\frac{a-b}{b}=\alpha$, α ſerá o achatamento do eſferoide, e deverá ſer conſiderado como

huma fracção muito pequena, da qual ſe deſpregaráõ as potencias ſuperiores á primeira. Daqui ſe tira

$$a = b(1+\alpha),\quad a^2 - b^2 = b^2((1+\alpha)^2 - 1) = 2b^2\alpha.$$

Se α foſſe nullo, a ellipſoide ſeria huma esfera, e r ſeria ſempre igual a a. Se elles differem, he em razão do achatamento da ellipſe, e por conſequencia eſta differença deve ſer muito pequena, e da meſma ordem que α. Ora, eſte raio r na expreſsão de R, eſtá já multiplicado por $a^2 - b^2$, ou por $2b^2\alpha$; aſſim para ſe deſprezar o quadrado de α, he inutil attender á differença que exiſte entre r e a, e póde-ſe eſcrever a em lugar de r. Iſto dá

$$R = \frac{(a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

ou ſubſtituindo em lugar de a o ſeu valor, e conſervando-ſe as primeiras potencias de α

$$R = b\,\frac{(1 + 2\alpha\,\mathrm{ſen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{1+\alpha}.$$

Deſenvolvamos eſta expreſsão. Temos, pela formula do binomio de *Newton*

$$(1 + 2\alpha\,\mathrm{ſen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}} = 1 + 3\alpha\,\mathrm{ſen}^2\varphi + \&c.$$

e pela divizão ordinaria

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \&c.$$

Multiplicando eſtas duas ſeries, limitando-nos ás primeiras potencias de α, teremos finalmente

$$R = b\left\{1-\alpha(1-3\text{fen}^2\,\phi)\right\}.$$

73. Nesta exprefsão fómente fen. ϕ he variavel. Se o achatamento foffe nullo, feria $R=b$, os meridianos ferião circulos e todos os raios de curvatura iguaes entre fi. No cafo que confideramos, eftes raios differem entre fi, por caufa do termo $3\alpha b\text{fen}^2\,\phi$. Ora o feno do angulo ϕ, que he a latitude, augmenta conftantemente do equador ao pólo. Por tanto he claro que tambem os raios da curvatura vão crefcendo no mefmo fentido proporcionalmente ao quadrado do feno de latitude; e como os arcos que correfpondem ao mefmo numero de gráos em differentes circulos são proporcionaes em comprimento aos raios deffes circulos, fegue-fe que os gráos do meridiano crefcem tambem do equador ao pólo na mefma razão.

74. Confideremos agora o arco de hum gráo medido fobre o esferoide na latitude ϕ, e reprefentemo-lo por c, fendo R o raio de curvatura, $2\pi R$ ferá a circunferencia do circulo, do qual o arco c mede hum gráo. Teremos

$$360c = 2\pi R;$$

donde fe tira

$$R = \frac{360.c}{2\pi}.$$

Então a equação precedente ficará

$$\frac{360.c}{2\pi} = b\left\{1-\alpha(1-3\text{fen}^2\,\phi)\right\}.$$

Seja c' outro arco tambem de hum gráo, medido na latitude ϕ', teremos do mefmo modo

$$\frac{360c'}{2\pi}=b\left\{1-\alpha(1-3\text{ſen}^2\varphi')\right\}.$$

Dividindo as duas equações, membro por membro, virá

$$\frac{c}{c'}=\frac{1-\alpha(1-3\text{ſen}^2\varphi)}{1-\alpha(1-3\text{ſen}^2\varphi')},$$

equação em que não ha mais incognita que o achatamento α, e que dá, deſprezando o quadrado de α

$$\frac{c}{c'}=1-3\alpha(\text{ſen}^2\varphi'-\text{ſen}^2\varphi);$$

e donde ſe tira finalmente

$$\alpha=\frac{c'-c}{3c(\text{ſen}^2\varphi'-\text{ſen}^2\varphi)}.$$

75. Tomemos para exemplo o gráo medido no equador por *Bouguer*, e o de França medido por *Delambre* e *Mechain*. Teremos neſte caſo

$$c=56753^t\ \ldots\ \varphi=0,\ c'=57018{,}42,\varphi'=46^\circ{,}2.$$

O que dá

$c'-c=265^t\ 42\ ..\ \text{ſen}\varphi'=0,\ 721753\ ..\ \text{ſen}\varphi=0$, e

$$\alpha=\frac{265{,}42}{88696{,}02}=\frac{1}{334}.$$

76. Conhecido α, tornemos á equação

$$\frac{360c}{2\pi}=b\left\{1-\alpha(1-3\text{ſen}^2\varphi)\right\};$$

fazendo $\varphi = 0$, ella fica

$$\frac{360c}{2\pi} = b(1-\alpha) \text{ ; donde vem}$$

$$b = \frac{180.c}{\pi(1-\alpha)},$$

e desprezando as segundas potencias de α

$$b = \frac{180.c(1+\alpha)}{\pi}.$$

Temos tambem $a = b(1+\alpha)$. Por tanto ficaráõ conhecidos os valores de a, e b, isto, he os dous eixos do ellipsoide.

Pondo em lugar de α e c os seus valores, se acha

$$b = 3261443^{t}$$
$$a = 3271208$$
$$a-b = 9765.$$

77. Comparando do mesmo modo o gráo da *Laponia* com o do equador, teremos o achatamento $\frac{1}{325}$, e para a e b valores pouco differentes dos precedentes. Em todos os calculos, em que entrar o achatamento da terra, tomaremos sempre $\frac{1}{334}$.

78. Empreguemos tambem para examinarmos a figura da terra os comprimentos observados dos pendulos de segundos, tomando por unidade o de Paris.

Latit.	*Lugar.*	*Comprim.*	*Obſervadores.*
0	*Peru*	0,99669	*Bouguer.*
9°,549	*Porto-bello.*	0,99689	*Bouguer.*
11,925	*Pondichery.*	0,99710	*Gentil.*
18,0	*Jamaica.*	0,99745	*Campell*, concluido de Londres.
18,45	*Goave pequena.*	0,99728	*Bouguer.*
33,921	*C. Boa Eſper.*	0,99877	*La Caille.*
43,596	*Toloſa.*	0,99950	*Darquier.*
43,213	*Viena d'Auſtr.*	0,99987	*Lieſganig.*
48,834	*Paris.*	1,00000	*Bouguer.*
50,967	*Gotha.*	1,00006	*Zach.*
51,498	*Londres.*	1,00018	Comparando as oſcillações de hum pendulo invariavel tranſportado a Paris,
58,248	*Petersburg.*	1,00074	*Mallet.*
59,94	*Aringberg.*	1,00101	*Griſchow.*
66,798	*Ponoi.*	1,00137	*Mallet.*
67,077	*Laponia.*	1,00148	*Academicos Francezes.*

79. De qualquer modo que ſe combinem, não ſe póde evitar hum erro menor que 0,00018 na hypotheſe de que as variações da gravidade creſcem do equador aos pólos como o quadrado do ſeno da latitude.

80. *Laplace* conclue daqui, por huma theoria muito ſublime, a ellipticidade da terra $\frac{1}{335,78}$, e dá por expreſsão do comprimento do pendulo

$$0,99676 + 0,0056724 \,\text{ſen}^2\, \Psi$$

ſendo ψ a latitude. Para ter o comprimento abſoluto do pendulo em hum lugar qualquer cuja latitude he Ψ, baſta multiplicar eſta expreſsão pelo comprimento abſoluto no equador. *Bouguer* achou-o de 3,3619 palmos, mas parece que o ſeu methodo dá ao pendulo hum comprimento muito grande, porque em razão da groſſura do fio e da pequena reſiſtencia, que oppõe a ſua flexão, o centro das oſcillações deve eſtar hum pouco abaixo do centro de ſuſpensão. *Borda*, que determinou por hum meio muito exacto o comprimento do pendulo de ſegundos no obſervatorio de *Paris* o achou igual a 3,3722 palmos. Dividindo-o por $0,99676+0,0056724 \text{ſen}^2 \psi$, ſendo Ψ a latitude do obſervatorio, temos 3,3723 palmos; por eſte factor he que ſe deve multiplicar a formula achada, para ter o comprimento abſoluto do pendulo em qualquer lugar, igual

$$a \quad 3,3614^{pal} + 0,001913 \text{ſen}^2 \psi$$

CAPITULO VI.

Conſequencias phyſicas do achatamento da terra.

81. AInda que o achatamento da terra ſeja huma quantidade muito pequena, o ſeu conhecimento he ſummamente importante em razão das conſequencias, que trás comſigo.

82. Primeiramente he claro que a gravidade, ſempre perpendicular á ſuperficie, não tende ao centro da terra. As ſuas direcções ſe apartão delle huma quantidade muito pequena, da meſma ordem que o achatamento. Logo ha huma ligação, huma relação neceſſaria entre a figura da terra e a gravidade. Seguindo eſta relação, conſeguiremos talvez deſcobrir donde procede o meſmo achatamento, e a que cauſa provavel ſe póde elle attribuir.

83. Confiderando a gravidade de hum modo gèral, vemos que ella obra fobre todos os corpos terreftres como por huma efpecie de attracção, que os follicita para a terra, e tende a precipita-los nella. Efta força fubfifte no cume dos montes, e nas mais profundas covas. Por tanto póde-fe confiderar a terra como compofta de huma infinidade de particulas materiaes, reunidas, e concentradas pela gravidade.

84. Se eftas particulas não formárão fempre huma maffa folida, fe antigamente fe achárão em hum eftado de molleza, que dava mais liberdade aos feus movimentos, ellas deverião accomodar-fe por fi mefmas como requeria a natureza das forças, que as animavão; e fuppondo-as follicitadas fó pela gravidade, devião ellas reunir-fe em huma maffa esferica, como fazem as gotas de agoa e de mercurio. Ora, grande numero de factos de hiftoria natural atteftão que efte eftado exiftio realmente, e que a terra primitivamente foi fluida. Mas como ella não tomou a figura esferica, devemos concluir que alguma outra caufa actuava tambem fobre as fuas particulas, e contribuia á fua difpofição. Ifto he facil de explicar huma vez que fupponhamos que a terra gira diariamente fobre fi mefma; porque então efta caufa que elevou o equador, e achatou os pólos, he certamente a força *centrifuga* devida ao movimento de rotação.

85. Com effeito he claro que, fe a terra gira, as fuas diverfas partes fazem esforço para fe affaftarem do eixo de rotação. Defta maneira huma pedra, voltada rapidamente em huma funda, eftende a corda a que eftá preza, e a quebra fe he muito fraca. Efta força centrifuga crefce com a velocidade; he a maior poffivel nos pontos do equador que defcrevem o maior circulo; he nulla nos pólos, que são immoveis, e decrefce por gráos infenfiveis de hum deftes limites ao outro. A terra pela acção defta força, devia por tanto achatar-fe nos pólos, e elevar-fe no equador.

86. Confideremos duas columnas fluidas communicando entre fi, das quaes huma fe dirige no fenti-

do do eixo que paſſa pelos pólos, a outra, no plano do equador; eſtendendo-ſe eſtas columnas do centro á ſuperficie da terra. As particulas materiaes, que ſe achão na columna do equador, são favorecidas pela força centrifuga, que tende a affaſta-las do eixo de rotação, e a ſua gravidade diminue hum pouco. A columna dos pólos, ao contrario, não tem força centrifuga, e obedece inteiramente á gravidade, que a impelle para o centro da maſſa. Logo ella tem realmente mais pezo do que a outra, e não póde haver equilibrio entre ellas ſem que a columna do equador ſe eleve, abaixando-ſe a dos pólos, de maneira que a diminuição da gravidade fique compenſada pelo augmento da maſſa. O meſmo effeito deve produzir-ſe em todas as columnas parallelas ao equador, mas elle vai enfraquecendo á medida que he menor a força centrifuga, e eſtes alongamentos graduados produzem ſobre o eſferoide huma elevação geral, que diminue inſenſivelmente do equador para os pólos.

87. Aſſim, ſuppondo que a terra gira, o ſeu achatamento ſeria huma conſequencia neceſſaria da ſua rotação, e por conſequencia, como eſte achatamento exiſte, elle indica a rotação com muita probabilidade.

88. Seguindo eſta inducção, ella nos conduz a outra conſequencia não menos importante. Se a terra gira, a força centrifuga deve diminuir do equador para o pólo; e como ella he ſempre perpendicular ao eixo de rotação, a ſua direcção, dantes oppoſta á gravidade, cada vez fica mais obliqua. Logo o ſeu effeito deve ſer menor para contrabalançar a gravidade; aſſim caminhando do equador para os pólos, a quéda dos corpos deve accelerar-ſe, e o meſmo corpo póde ſer cada vez mais pezado.

89. As oſcillações do pendulo offerecem hum meio ſimples de verificar eſte facto. Se a quéda dos corpos ſe accelera, as oſcillações devem fazer-ſe mais rapidamente, e póde-ſe calcular pela ſua velocidade o augmento da gravidade. Ora, levando hum meſmo pendulo a differentes lugares da terra, ſe achou que

elle anda mais depreſſa á medida que ſe affaſta do equador; e a lei deſta acceleração, que ſe tem determinado com muita exactidão, he hum novo indicio da rotação do globo terreſtre.

90. Para pôr eſte facto em evidencia, baſtará attender aos comprimentos do pendulod e ſegundos, quaes ſe obſervárão nas differentes latitudes. A tabella (n°.78) moſtra que quanto mais longe eſtamos do equador, tanto mais comprido deve ſer o pendulo para ter oſcillações da meſma duração. Donde ſe ſegue neceſſariamente que a gravidade augmenta, quando nos adiantamos naquella direcção; porque, ſe perſiſtiſſe a meſma, augmentando o pendulo, affrouxarião as oſcillações. Deſte facto ſe póde qualquer convencer, fazendo oſcillar no meſmo lugar pendulos de differentes comprimentos.

91. Eſte augmento da gravidade, caminhando do equador aos pólos, he hum novo indicio da rotação da terra. Exiſte outro facto muito notavel que conduz á meſma conclusão; he a deſviação dos corpos que cahem de huma grande altura. Para percerbermos eſte phenomeno, imaginemos hum corpo pezado, poſto em grande diſtancia da ſuperficie da terra, por exemplo, no cume de huma torre alta. Se a terra for immovel, o corpo cahirá ao pé da terra, ſeguindo a vertical; mas ſe a terra girar ſobre ſi meſma, o corpo, que participa deſte movimento, terá huma velocidade de rotação maior que o pé da torre, porque eſtá mais longe do eixo. Por tanto, quando cahir com o movimento compoſto daquella velocidade, e da gravidade, deverá adiantar-ſe hum pouco á vertical no ſentido do movimento da terra, e por conſequencia depois da ſua quéda, eſtará hum pouco deſviado da torre para o Oriente; o que a experencia confirma.

92. Se eſtes argumentos não provão com evidencia a rotação da terra, ao menos a fazem muito provavel.

LIVRO II.

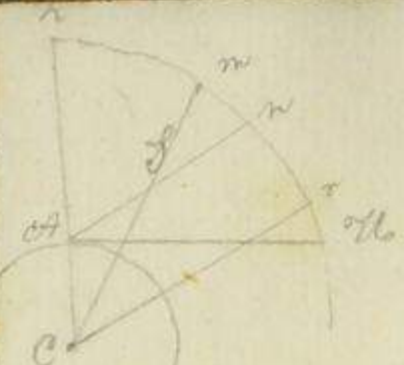
Dos Corpos Celestes.

CAPITULO I.

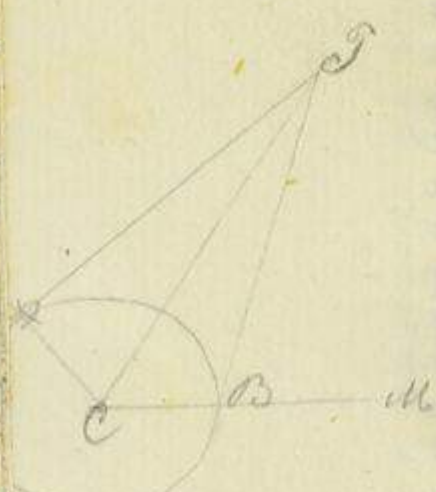
Da Parallaxe em altura.

93. O Centro da terra deſcreve no Ceo o circulo, que tem o nome de *ecliptica*; mas como o meſmo objecto apparece em differentes poſições relativamente a eſte circulo, viſto do centro e da ſuperficie, os aſtronomos reduzem ſempre as ſuas obſervações ao que ellas ſerião, ſe foſſem feitas no centro da terra; em conſequencia do que os lugares dos corpos celeſtes são calculados como viſtos da ecliptica, que vem a ſer para eſte fim hum plano fixo, em qualquer parte da ſuperficie da terra, que ſe fação as obſervações.

94. Seja C o centro da terra (Fig. 15), A o lugar do obſervador ſobre a ſua ſuperficie, S hum objecto qualquer, ZH a esfera das eſtrellas fixas, á qual ſe referem no noſſo ſyſtema os lugares de todos os corpos; Z o zenith, H o horizonte: tire-ſe CSm, ASn, e m he o lugar de S viſto do centro, e n viſto da ſuperficie. Ora, o plano SAC, que paſſa pelo centro da terra, he perpendicular á ſua ſuperficie, e por conſequencia paſſa pelo zenith Z; eſtando os pontos m, n no meſmo plano, o arco de parallaxe mn fica em hum circulo perpencicular ao horizonte; e por tanto não affecta o azimuth ſendo



a terra huma esfera. Ora, a parallaxe mn he medida pelo angulo mSn, ou ASC; e (Trig. 44) CS : CA :: ſen SAC, ou ſen SAZ : ſen ASC, que he a parallaxe $= \frac{CA \times ſen SAZ}{CS}$. Como CA he conſtante, ſuppondo a terra esferica, o ſeno da parallaxe varía na razão compoſta da directa do ſeno da diſtancia apparente ao zenith, e da inverſa da diſtancia do corpo ao centro da terra. Por tanto hum corpo no zenith não tem parallaxe, e no horizonte em s ella he a maxima E ſe o objecto eſtiver em huma diſtancia infinitamente grande, não terá parallaxe; daqui vem que ella não altéra os lugares apparentes das eſtrellas fixas. Como n he o lugar apparente e m o verdadeiro, a parallaxe abaixa os objectos em hum circulo vertical. Em differentes alturas do meſmo corpo, a parallaxe varía como o ſeno s da diſtancia apparente ao zenith; por tanto ſe for $q =$ á parallaxe horizontal, e o raio $=1$: teremos $1 : s : p : ps$, ſeno da parallaxe. Logo para acharmos a parallaxe em qualquer altura, devemos primeiro acha-la para huma altura dada.



95. Os Aſtronomos dão differentes methodos para eſte fim, contentar-nos-hemos com indicar o de *La Caille*, como o mais ſimples.

Seja P (fig. 16) hum corpo obſervado de dois lugares A e B no meſmo meridiano, o angulo total APB he a ſomma das duas parallaxes dos dois lugares. A parallaxe APC $=$ *par. hor.* $\times$ ſen PAL (n°.94), tomando APC por ſen APC, e a parallaxe BPC $=$ *par. hor.* $\times$ ſen PBM; por tanto *par. hor.* $\times$ (ſen PAL $+$ ſenPBM) $=$ APB $\therefore$ *par.hor.* $=$ APB dividido pela ſomma dos dois ſenos. Se os dois lugares não eſtiverem no meſmo meridiano, he neceſſario conhecermos quanto á mudança de declinação influe na altura do corpo no intervallo das paſſagens pelos meridianos dos dois obſervadores.

96. *Exemplo*. A 5 de Outubro de 1751 *La Cail-*

le no *Cabo da Boa Esperança* obſervou *Marte* 1′28″,8 abaixo do parallelo de λ de *aquario*, e em 25° diſtante do zenith. No meſmo dia em *Stockolmo* ſe obſervou *Marte* 1′57″,7 abaixo do parallelo de λ, e em 68°14′ de diſtancia do zenith. Por tanto o angulo APB he de 31″,9 e os ſenos das diſtancias ao zenith ſendo 0,4226 e 0,9287, a parallaxe horizontal era 23″,6. Por tanto ſe ſoubermos a razão que tem a diſtancia de *Marte* á terra para a diſtancia deſta ao *Sol*, teremos a parallaxe horizontal do *Sol*, porque as parallaxes horizontaes eſtão na razão inverſa das ſuas diſtancias á terra (94).

97. Segundo as taboas de *Mayer*, a maior parallaxe da Lua (ou quando eſtá mais proxima da terra) he 61′32″; e a menor (quando eſtá mais longe) he 53′52″, na latitude de *Paris*; o meio arithmetico he 57′42″; mas não he eſta a parallaxe na diſtancia media, porque a parallaxe varía na razão inverſa da diſtancia. *Delambre* calculou de novo a parallaxe pelas meſmas obſervações, porque *Mayer* a calculou, e achou que não concordava exactamente com a de *Mayer*. Elle fez a parallaxe equatorial 57′11″4. *Lallande* a faz de 57′5″ no equador, 56′53″2 no pólo, e 57′1″ no raio medio da terra, ſuppondo a differença dos diametros equatorial e polar de $\frac{1}{300}$ do todo. Pela formula de *Mayer*, a parallaxe equatorial he 57′11″,4.

98. Para acharmos a diſtancia media C*s* (fig. 16) da lua, temos AC raio medio da terra, *r*, : C*s*, diſtancia media (D) da lua á terra :: ſen. 57′1″ = A*s*C : raio :: 1 : 60,3; conſequentemente D = 60,3*r*; mas *r* = 3964 milhas (*) : logo D = 239029 milhas.

99. Conforme Mr. de *Lallande*, o ſemidiametro horizontal da lua : ſua parallaxe horizontal para o

(*) Inglezas.

raio medio (r) da terra :: $15' : 54'57'',4$, ou muito proximamente :: $3 : 11$; por tanto o femidiametro da lua he $\frac{3}{11}r = \frac{3}{11} \times 3964 = 1081$ milhas; e como a grandeza dos corpos esfericos eſtão como os cubos dos feus raios, teremos as grandezas da lua e da terra como $3^3 : 11^3$; ou como 1:49 proximamente.

CAPITULO II.

Da refracção.

100. QUando hum raio de luz paſſa de hum vacuo a hum meio, ou de hum meio a outro mais denfo, fe defvia da direcção rectilinea, fegundo huma perpendicular á fuperficie do meio que elle penetra. Por tanto a luz, paſſando do vacuo á atmosfera, ha-de curvar-fe para hum raio tirado ao centro da terra, fuppondo que a atmosfera he esferica e concentrica com a terra; e porque a denfidade da atmosfera crefce continuamente á medida que fe aproxima á fuperficie da terra, os raios de luz, no feu tranfito, entrão cada vez em hum meio mais denfo, e por confequencia a direcção do raio continuamente fe defviará da linha recta, e defcreverá huma curva; por tanto na fuperficie da terra os raios de luz entraráõ no olho do obfervador em direcção differente daquella, em que elles entrarião, fenão houvesfe atmosfera; confequentemente o lugar apparente do corpo donde vem a luz, he differente do lugar verdadeiro. Além diſto, o raio refractado fe move em hum plano perpendicular á fuperficie da terra; porque imaginando que hum raio chega á aquelle plano antes de refractado, como a refracção he naquelle plano, o raio deve continuar a mover-fe no mesmo. Logo a refracção he fempre em hum circulo vertical. Os antigos não fizerão cafo deſte effeito.

Ptolomeu refere huma differença no nafcente e poente das eftrellas em differentes eftados da atmosfera; e todavia não a conta no calculo das fuas obfervações; em quanto efta correcção fe deve empregar, quando fe requer grande exactidão. *Archimedes* obfervou o mefmo na agoa, e julgou que a quantidade de refracção eftava em proporção com o angulo de incidencia. *Alkazen*, optico *Arabe* do undecimo Seculo, obfervando as diftancias de huma eftrella circumpolar ao pólo, tanto acima, como abaixo, as achou differentes, como deve acontecer por caufa da refracção. *Snellius*, o primeiro, que obfervou a relação entre os angulos de incidencia e de refracção; diz que *Waltherus*, no feu calculo, fazia cafo da refracção; mas *Tycho* foi o primeiro que conftruio huma taboa para efte fim, a qual era muito incorrecta, porque elle fuppunha que a refracção em 45° era nulla. Pelos annos de 1660, *Caffini* publicou huma nova taboa de refracções, muito mais correcta do que a de *Tycho*; e defde effe tempo os aftronomos tem empregado o maior cuidado em conftruirem taboas mais correctas, porque o efcrupulo da aftronomia moderna requer a fua maior exactidão.

101. Para achar a quantidade de refracção, podemos empregar o feguinte methodo.

Tome-fe a altura maior e a menor de huma eftrella circumpolar, que paffa pelo zenith, ou muito perto, quando paffa pelo meridiano acima do pólo; então como a refracção no zenith he nulla, aquella obfervação nos dará a verdadeira diftancia da eftrella ao pólo, determinada precedentemente a altura do pólo fobre o horizonte; mas quando a eftrella paffa pelo meridiano abaixo do pólo, a fua diftancia vem affecta da refracção, e a differença das duas diftancias obfervadas, acima e abaixo do pólo, dá a refracção naquella altura apparente abaixo do pólo.

102. *Exemplo*. *La Caille*, em Paris, obfervou que huma eftrella paffava pelo meridiano 6′ diftante do zenith, e por confequencia na diftancia de 41°4′ do

pólo; por tanto passa pelo meridiano abaixo do pólo na mesma distancia, ou na altura de 7°46′; mas a altura observada naquelle tempo era 7°52′25″; logo a refracção na altura apparente era 6′25″.

103. Seja CAn (fig. 17) o angulo de incidencia, CAm o angulo de refracção, e consequentemente mAn a quantidade de refracção; seja CT a tangente de Cm, mv o seu seno, mw o seno de Cn, e tire-se rm parallela a vw; como a refracção do ar he muito pequena, podemos considerar o triangulo mrn como rectilineo; e pelos triangulos similhantes, Av : Am :: rn : $mn = \frac{An \times rn}{Av}$; mas Am he constante, e como a razão de mv para nw he constante pela lei da refracção, a sua differença, rn, varía como mv (*); por tanto, mn varía como $\frac{mv}{Av}$; mas $CT = \frac{Am \times mv}{Av}$, que varía como $\frac{mv}{Av}$, porque Am he constante; por tanto a refracção mn varía como CT, tangente da distancia apparente da estrella ao zenith, porque o

---

(*) Ainda que esta proposição seja muito facil a quem tem as mais ligeiras noções da theoria das *variações*, póde causar dúvida a quem não a conhece. Ajuntaremos por tanto huma simplicissima demonstração, que escapou ao celebre *Wood* na sua excellente Algebra para uso da Universidade de *Cambrigde* (4.ª Ediç. 1806).

Segundo o principio citado, $\frac{nw}{mv} = C$; logo $\frac{nw}{mv} - 1 = \frac{nw - mv}{mv} = \frac{rn}{mv} = C' \therefore rn = C'.mv$. Logo rn varía como mv.

angulo de refracção C A*m*, he o angulo comprehendido entre o raio refractado e a perpendicular á ſuperficie do meio, a qual perpendicular ſe dirige ao zenith. Pelo que, em quanto a refracção for tão pequena que o triangulo *mrn* ſe poſſa conſiderar como rectilineo, eſta regra ſerá ſufficientemente exacta.

104. O crepuſculo da manhã e da tarde, procede da refracção e reflexão dos raios do Sol na atmosfera.

He provavel que e reflexão provém principalmente das exhalações de varias eſpecies, de que as partes inferiores da atmosfera eſtão carregadas, porque o crepuſculo continúa até que o Sol eſteja mais abaixo do horizonte á terra, do que eſtá pela manhã, quando elle começa; e dura mais tempo de verão que no inverno. Ora, no primeiro caſo o calor do dia tem levantado os vapores e exhalações; e no ſegundo elles eſtão mais elevados pelo calor da eſtação; por tanto ſuppondo que elles são cauſa da reflexão, o crepuſculo deve ſer mais extenſo á tarde que pela manhã, e mais no verão do que no inverno.

105. Outro effeito da refracção he dar ao Sol e á lua huma figura apparente oval, porque, ſendo a refracção do limbo inferior maior do que a do ſuperior, o diametro vertical diminue. Porque, ſupponhamos que o diametro do Sol he de 32', e que o limbo inferior toca o horizonte, então a refracção media daquelle limbo he 33', mas ſendo a altura do limbo ſuperior 32', a ſua refracção he ſómente 28'6'', e a differença das refracções he 4'54''; quantidade que o diametro vertical parece mais curto do que o horizontal. Quando o corpo não eſtá muito perto do horizonte, a figura do corpo he muito proximamente a de huma ellipſe, porque a refracção diminue quaſi uniformemente.

CAPITULO III.

Syſtema do mundo.

106. DIſſemos que o movimento diurno dos corpos celeſtes podia explicar-ſe, quer ſuppondo a terra immovel, e aquelles corpos formando as ſuas revoluções em circulos parallelos entre ſi, quer ſuppondo que a terra gira em torno de hum dos ſeus diametros como eixo; e os corpos fixos; e que em ambos os caſos os ſeus movimentos diurnos apparentes ſerião os meſmos. Vimos que as eſtrellas eſtão em huma diſtancia da terra quaſi infinita, e não he provavel que huma infinidade de corpos, dos quaes a maior parte, he apenas viſivel com os melhores teleſcopios, em diſtancias tão grandes, aſſim da terra, mo entre ſi, tenhão os ſeus movimentos tão compaſſados, que girem no meſmo tempo, e em circulos parallelos, ſem terem corpo algum no centro. Por outra parte, nada ha mais ſimples do que a explicação de todos os phenomenos pela rotação da terra. Logo eſta hypotheſe he preferivel á da quietação da terra. Se ajuntarmos a eſta razão as conſiderações que fizemos no Capitulo 6.° do Livro antecedente, teremos hum grão de probabilidade, que ſe chega muito á verdade, e que ainda creſce com o ſeguinte argumento de analogia. Os planetas são corpos opacos e esfericos, como a terra (*); todos os planetas ácerca dos quaes ſe tem feito ſufficiente numero de obſervações para determinar a ſua materia, ſe tem achado girarem em torno de hum eixo, e terem viſualmente o diametro do equador maior do que o po-

(*) Veja o Cap. II. do Liv. I.

lar. Ora, segundo a 4.ª regra de (a) *Newton*, na Phylosophia Experimental, devemos admittir as proposições deduzidas dos phenomenos por meio de inducção, como exactamente ou proximamente verdadeiras, em quanto não houver razão em contrario. Logo a hypothese da rotação da terra tem já huma probabilidade, que se póde reputar como verdade.

110. Além deste movimento diurno apparente, o Sol, a lua, e os planetas, tem outro movimento; porque se tem observado que elles fazem huma revolução completa entre as estrellas fixas, em differentes periodos; e em quanto formão estes movimentos a respeito das estrellas fixas, nem sempre parecem mover-se na mesma direcção, mas humas vezes parecem estacionarios, e outras moverem-se em direcção contraria. Consideraremos summariamente os differentes systemas, que se tem inventado para explicar estas apparencias.

111. *Ptolomeu* suppunha a terra em perfeita quietação, e todos os mais corpos, isto he, o Sol, a lua, os planetas, os cometas, e as estrellas fixas, girando em torno della cada dia; mas que, além deste movimento diurno, o Sol, a lua, os planetas e cometas tinhão hum movimento relativo ás estrellas fixas, e estavão situadas ácerca da terra, na ordem seguinte, Lua, Mercurio, Venus, Sol, Marte, Jupiter, Saturno. Primeiramente suppoz elle que estas revoluções erão feitas em circulos em roda da terra, postos hum pouco fóra do centro, a fim de explicar algumas irregularidades, dos seus movimentos; mas como os seus movimentos retrogrados, e apparencias estacionarias não podião assim entender-se, suppoz que elles se movião em epicycloides da maneira seguinte. Seja ABC (fig. 18) hum circulo, S o centro, E a terra, *abcd* outro circulo, cujo centro *v*

(a) Lib. Princip.

eſtá na circumferencia do circulo ABC. Imagine-ſe a circumferencia do circulo ABC tranſportada em torno da terra em 24 horas, ſegundo a ordem das letras, e tenha ao meſmo tempo o centro *v* do circulo *abcd* hum pequeno movimento na direcção oppoſta, e gire hum corpo neſte circulo na direcção *abcd*; então he claro que, pelo movimento do corpo neſte circulo, e pelo movimento do meſmo circulo, o corpo deſcreverá a curva repreſentada por *klmbnop*; e ſe tirarmos as tangentes E*l*, E*m*, o corpo parecerá eſtacionario nos pontos *l* e *m*, e o ſeu movimento ſerá retrogrado por *lm*, e depois outra vez direćto. Para fazer que Venus e Mercurio acompanhem ſempre o Sol, ſuppozerão que o centro *v* do circulo *abcd* eſtava ſempre muito perto em huma linha rećta entre a terra e o Sol, porém mais perto para Venus do que para Mercurio, a fim de dar a cada hum a alongação, que lhe compete. Ainda que eſte ſyſtema explica todos os movimentos dos corpos, não abrange as phaſes de Venus e Mercurio; porque, neſte caſo em ſuas conjunções com o Sol devem parecer corpos opacos, e perderem a luz deſde as ſuas maiores elongações; em quanto a obſervação moſtra que em huma das ſuas conjunções brilhão plenamente. Por tanto eſte ſyſtema não póde ſer verdadeiro.

112. O ſyſtema dos *Egypcios* era eſte: a terra he immovel no centro, em torno do qual ſe movem por ordem, a Lua, o Sol, Marte, Jupiter, e Saturno, e em torno do Sol gira Venus e Mercurio. Eſta diſpoſição explicará as phaſes de Mercurio e Venus, mas não os movimeutos apparentes de Marte, Jupiter, e Saturno.

113. O ſyſtema, que mencionaremos agora, bem que poſterior em tempo ao ſyſtema verdadeiro, ou de *Copernico*, como vulgarmente ſe chama, he o de *Tycho Brake*, Fidalgo Polaco. Elle concorda com o ſyſtema de Copernico, como ſatisfazendo a todas as apparencia do modo mais ſimples; mas imaginando

que para ſatisfazer ao ſentido litteral de algumas paſſagens da eſcritura era neceſſario abſolutamente ſuppôr a terra em quietação, alterou o ſyſtema, porém approximou-ſe a elle quanto pôde. Neſte ſyſtema, ſuppõe-ſe a terra immovel no centro das orbitas do Sol e da Lua, ſem rotação alguma em torno de hum eixo; e faz-ſe o Sol o centro das orbitas dos outros planetas, que por conſequencia girão com o Sol em roda da terra. Por eſte ſyſtema, ſe podem explicar os differentes movimentos e phaſes dos planetas, em quanto eſtes não ſe podem perceber pelo ſyſtema de Ptolomeu; e elle não he obrigado a conſervar as epicycloides para explicar os ſeus movimentos retrogrados e apparencias eſtacionarias. Huma objecção natural a eſte ſyſtema he a falta de ſimplicidade, pela qual ſe expõe todos os movimentos apparentes, e a neceſſidade de girarem todos os corpos celeſtes em torno da terra cada dia; de mais, he phyſicamente impoſſivel que hum grande corpo, como o Sol, gire em hum circulo em roda de hum pequeno corpo, como a terra, em quietação no ſeu centro; ſe hum corpo for muito maior do que outro, o centro em torno do qual elles girão, deve eſtar muito perto do corpo maior; argumento que tambem ataca o ſyſtema de Ptolomeu. A obſervação moſtra que o plano, em que, ſegundo eſta ſuppoſição, o Sol deve mover-ſe diariamente, paſſa pela terra ſó duas vezes no anno. Logo não póde haver na terra huma força, que poſſa conſervar o Sol na ſua orbita, porque elle ſe moveria em huma ſpiral, que muda continuamente de plano. Em ſumma, a complicação com que ſe explicão todos os movimentos, e a impoſſibilidade phyſica de ſe effeituarem eſtes, he huma razão ſufficiente para rejeitar eſte ſyſtema; principalmente conſiderando nós quão ſimplesmente ſe podem explicar, e demonſtrar todos eſtes movimentos pelos principios geraes do movimento. Alguns Sectarios de Tycho, vendo o abſurdo de ſuppôr todos os corpos celeſtes girando diariamente em roda da terra, derão á terra hum movimento de rotação para explicar o ſeu movimento diurno ; e eſte ſyſtema ſe chamou *Semi-Tychonico* ; mas a outros reſpeitos as objecções a eſte ſyſtema são as meſmas.

114. O ſyſtema hoje geralmente adoptado he o de *Copernico*. O primeiro que o enſinou foi *Pythagoras*, que viveo pelos annos de 500 antes de Jeſu Chriſto, e *Philolaus* ſeu diſcipulo, conſervou o meſmo ; mas depois o engeitárão, até que *Copernico* o reſuſcitou. Aqui colloca-ſe o Sol no centro do ſyſtema, em torno do qual girão os outros corpos celeſtes na ordem ſeguinte ; Mercurio, Venus, Terra, Marte, Jupiter, Saturno, Herſchel, e os tres novos planetas Ceres, Pallas, e Juno ; atraz deſtes, em diſtancias immenſas, eſtão poſtas as eſtrellas fixas ; a Lua gira em roda da terra, e a terra gira ſobre hum eixo.

Eſta diſpoſição dos planetas ſatisfaz a todos os phenomenos do modo mais ſimples. Porque da conjunção inferior á ſuperior, Venus, e Mercurio apparecem, primeiro em creſcente, depois em quarto, e ſucceſſivamente augmentando a parte allumiada, e o contrario deſde a conjunção ſuperior á inferior, ſempre são retrogrados na inferior, e directos na ſuperior. Marte e Jupiter apparecem mingoados, perto das quadraturas ; em Saturno, Herſchel e nos mais não ſe percebem phaſes em razão da ſua grande diſtancia. Os movimentos dos planetas ſuperiores ſe obſervão directos na ſua conjunção e retrogrados na ſua oppoſição. Todas eſtas circunſtancias são taes quaes devem ter lugar no ſyſtema de Copernico. Os movimentos dos planetas são tambem conformes com os principios de phyſica. Notaremos mais que a ſuppoſição do movimento da terra he neceſſaria para explicar hum pequeno movimento apparente, que ſe tem obſervado nas eſtrellas fixas, e ao qual ſenão póde ſatisfazer de outra maneira. A armonia do todo he huma prova tão convincente da verdade deſte ſyſtema, como o podera ſer a demonſtração mais directa ; por tanto abraçaremos eſte ſyſtema.

CAPITULO IV.

Dos movimentos proprios dos aſtros, e dos meios de os determinar.

115. NA grande diſtancia, em que eſtão os aſtros, os noſſos olhos não podem perceber os ſeus movimentos, e o unico meio de os alcançarmos he comparar as ſuas poſições obſervadas em differentes epocas.

116. E aſſim como para traçarmos huma linha curva, da qual ſe ignora a figura e a lei, ſe determinão por obſervação alguns dos ſeus pontos, que ſe unem depois por hum traço continuo, aſſim para determinar os movimentos dos aſtros ſe obſerva cada dia o ponto, em que elles ſe achão na esfera celeſte, e depois ſe examina a fórma do movimento pela condição de haver o aſtro ſucceſſivamente paſſado por todas as ſuas poſições na ordem, em que forão obſervadas.

117. Determina-ſe cada dia o lugar de hum aſtro, obſervando a ſua altura meridiana, e a hora da ſua paſſagem pelo meridiano. Da altura ſe conclue a declinação, e do momento da paſſagem ſe deduz a ſua aſcensão recta, relativamente a hum ponto do Ceo arbitrario. Eſtes dados determinão o ponto da esfera celeſte, em que o aſtro ſe acha.

118. Se marcaſſemos todos eſtes pontos ſobre hum globo, onde ſe houveſſem traçado em angulos rectos dois grandes circulos para repreſentar o equador e o primeiro meridiano, a ſua reunião formaria ſobre o globo a repreſentação do caminho do aſtro no Ceo. (Veja-ſe fig. 19). O calculo permitte fazer eſta operação com muita exactidão; elle fornece meios de traçar a verdadeira curva, que o aſtro deſcreve, e deſte modo ſe fixa mentalmente o veſtigio dos aſtros na esfera celeſte.

119. Refta fómente determinar as variações das fuas diftancias, para conhecer completamente feus movimentos. Empregão-fe obfervações dos feus diametros apparentes, que augmentão á medida que fe achegão, e diminuem quando fe affaftão. Ou, fe o diametro do aftro he muito pequeno, como acontece aos cometas, e á maior parte dos planetas, compara-fe com objectos celeftes como o Sol, do qual com antecedencia fe tem determinado o caminho pelo methodo indicado.

120. A' medida que eftas obfervações fe accumulão, fe cotejão humas com outras. Corrigem-fe, aproveitando para cada huma dellas os tempos mais favoraveis, a faber, aquelles, em que as quantidades, que fe procurão, fe moftrão ifoladas, e no feu maior auge. Chega-fe finalmente a conhecer o *eftado do Ceo* exactamente, ifto he, o que perfifte conftante, e o que muda cada dia, cada anno, ou em intervallos mais confideraveis.

121. Começa então a aftronomia theorica as fuas funções. Compára os phenomenos fimilhantes para defcobrir as fuas relações, ifto he, as grandes leis, a que elles são fugeitos, e que são como a fonte commum, de que elles procedem, de forte que todos nelles fe achão implicitamente. Examina-fe depois, fegundo as regras da mechanica, qual deve fer a força, que obra fobre os corpos celeftes, para que eftas leis, e os movimentos fejão quaes realmente fe obfervão. Determinão-fe defta maneira aquellas forças, e fe conhece que ha fó huma, unica para todos os aftros, que os puxa huns para os outros em razão inverfa do quadrado das diftancias, e que por confequencia fe chamou attracção: não intentando com ifto exprimir a fua natureza, mas fómente indicar a maneira, com que ella obra. Os effeitos defta força, modificados pela diftancia dos differentes corpos celeftes, produzem todos os phenomenos aftronomicos, que fe achão affim explicados com toda a miudeza, e a aftronomia vem a fer hum grande

problema de mechanica, cujos elementos são dados pela obfervação.

122. Podemos então retroceder, reduzir a numero as formulas dos movimentos celeftes, deduzidas do conhecimento de fuas caufas e formar o que fe chama *taboas aftronomicas*. Com o foccorro deftas fabemos exactamente qual ferá o eftado do Ceo nos feculos futuros, qual era nos feculos paffados. Ellas fornecem aos navegantes meios de conhecerem o feu caminho, aos geographos finaes para determinarem a pofição dos lugares, aos lavradores enfinão a regularem os feus trabalhos, ás nações dão epocas para fixarem a fua hiftoria. Defta maneira a aftronomia chega ao feu refultado definitivo, que he, como em todas as fciencias, a utilidade geral e a perfeição da fociedade. Mas para confeguir completamente efte fim, ella requer a ultima exactidão; efte o objecto conftante dos trabalhos dos aftronomos. Difficultofamente fe comprehende o grão de exacção a que elles tem chegado; mas efte fó facto o decidirá; fe dirigirmos hoje hum oculo para hum ponto determinado do Ceo, podemos prever muitos annos antes, o dia, a hora, o minuto, o fegundo, em que hum aftro defignado ha de vir pôr-fe exactamente no centro do oculo, e cobrir hum fio mais fino que hum cabello. Os erros das taboas actuaes fe comprehendem na figura defte fio.

CAPITULO V.

Applicação ao Sol. Theoria do feu movimento circular.

123. PAra medir exactamente a declinação do centro do Sol, obferva-fe a diftancia meridiana do feu limbo fuperior ao zenith, e a do limbo inferior. Ajunta-fe a eftes valores o effeito da refracção, e á

ſemi-ſomma he a diſtancia verdadeira do zenith ao centro do Sol. Deſte reſultado ſe tira a parallaxe, e temos a diſtancia, que ſe obſervaria do centro da terra. Além diſto, a diſtancia do equador ao zenith, que he igual á latitude, he conhecida. A differença deſtas diſtancias he a declinação do Sol. Tomaremos para exemplo as obſervações ſeguintes feitas por *Piazzi*, em *Palermo*, a 7 de Dezembro de 1791.

Diſtancia do limbo do Sol ao zenith.	*Limb. ſuper.* 60 28′28″	*Limb. infer.* 61°1′12″
Refracção	1 40″	1 42
Diſt. verd. do l. do Sol ao zen.	60°30 8	61 2 54
Semi-ſomma, ou diſtancia do zenith ao centro do Sol.	60°46′31″	
Parallaxe	7,5	
Diſt. verd. do zen. ao c. do Sol.	60 46 23,5	
Diſt. do zen. ao equ. ou lat. do obſerv. de Palermo.	38 6 44	
Declinação do Sol auſtral.	22 39 39,5	
Subtrahindo as diſtancias verdadeiras dos dois limbos do Sol ao zenith, huma da outra, a ſua differença dará o diametro apparente do Sol a 7 de Dezembro de 1791, igual a	32′46″	

124. Para fazer eſtas obſervações, obſerva-ſe o contacto dos dois limbos do Sol a hum fio eſtendido horizontalmente no interior do oculo, e perpendicular ao ſeu eixo. Até agora não attendemos á groſſura deſte fio; mas fallando exactamente, a diſtancia obſervada do limbo ſuperior ao zenith, he menor huma quantidade igual ao ſemidiametro do fio; e a diſtancia do limbo inferior he maior a meſma quantidade. Eſtes erros ſe compensão no calculo da diſtancia media do centro do Sol; e ſommão-ſe na medida do ſeu diametro apparente. Por tanto devemos tirar do

resultado a grossura do fio. *Piazzi* a avalia em 9'' no seu oculo, o que dá por diametro verdadeiro 32'37''

125. Tomando assim cada dia as alturas meridianas do Sol, e comparando-as entre si, conhecer-se-ha o movimento deste astro em declinação (*).

126. Para termos o seu movimento em ascensão recta, se observa cada dia o instante da sua passagem pelo meridiano, e se compara com o de huma estrella conhecida. Isto se faz, observando o contacto do seu limbo anterior, e o do posterior, ao fio vertical do meio da luneta meridiana, e tomando hum meio arithmetico entre estes dois instantes. O erro, que resulta da grossura do fio, se compensa como na medida das distancias ao zenith, e he inutil attender a elle. O tempo, que corre entre as passagens da estrella e do Sol, faz conhecer a differença dos seus meridianos. Esta differença, calculada dia por dia, dá o movimento do Sol em ascensão recta.

127. Reunindo estes resultados, temos todos os dados necessarios para determinar a lei dos movimentos do Sol, e traçar o seu caminho na esfera celeste.

(*) Ainda que havemos adoptado o systema de Copernico, continuamos a explicar os movimentos do Sol, como se este não fosse constante, mas sim a terra. Com isto nos acomodamos á linguagem vulgar, e á pratica dos Astronomos. Para corrigir este modo de fallar, basta lembrar que, sendo o Sol immovel, a terra executa em torno delle todos os movimentos, que elle pareceria fazer em torno della em sentido contrario. A revolução annua da terra se faz em huma ellipse, da qual o Sol occuparia hum foco; e quanto se diz da ellipse solar convem á terrestre. Feita esta observação, entender-se-ha facilmente quanto dissermos dos movimentos do Sol.

128. Confideremos primeiro as declinações. Ellas são, já boreaes, já auſtraes. Aſſim o Sol paſſa ſucceſſivamente de huma e de outra parte do equador. As ſuas variações ſe fazem de huma maneira regular, mas deſigual. Ellas são muito rápidas, quando o Sol ſe approxima ao plano do equador, e alli o ſeu valor he o maximo. Diminuem á medida que o Sol ſe affaſta daquelle plano, e são inſenſiveis nas maiores declinações. Então as alturas meridianas deſte aſtro mudão muito pouco de dia a dia, e elle parece como eſtacionario. Por iſſo ſe chamárão *ſolſticios* os parallelos, que elle deſcreve no Ceo naquella epoca. Tambem ſe chamão *tropicos* de huma palavra Grega τρεπω que ſignifica voltar, porque quando o Sol chega á aquelle termo, parece voltar para trás. O que eſtá ao norte, ſe chama *tropico de Cancer*; o outro he *de Capricornio*. Eſtas denominações parecem dadas por povos ſituados ao norte do equador, que vendo o Sol recuar para o Sul depois da paſſagem pelo tropico boreal, attribuirão a eſte parallelo o ſigno de *Cancer* ou do caranguejo, animal que anda para trás muitas vezes. Ao contrario o Sol parecendo-lhes aſſommar do tropico auſtral para ſubir ao equador, affectárão a eſte parallelo o ſigno de *Capricornio*, ou da Cabra; porque eſte animal trepa. Eſtes dous parallelos eſtão ſituados em iguaes diſtancias do equador e a ſua declinação actual he de quaſi 23°28′.

129. Vamos agora ao movimento em aſcensão recta. Se o Sol primeiro paſſou pelo meridiano ao meſmo tempo que a eſtrella, a que ſe compara, no outro dia chega mais tarde, e ſe affaſta cada vez mais. Em certos tempos eſte atrazamento he de 3′,5, noutros 4′,5; o ſeu valor medio he 4′. O Sol não alcança a eſtrella ſenão depois de fazer o giro do Ceo, e depois de haver paſſado ſucceſſivamente por todas as ſuas declinações. Então os ſeus atrazamentos diarios começão na meſma ordem. Logo o movimento deſte aſtro parallelamente ao equador, ſe faz do Occidente para o Oriente, de huma ma-

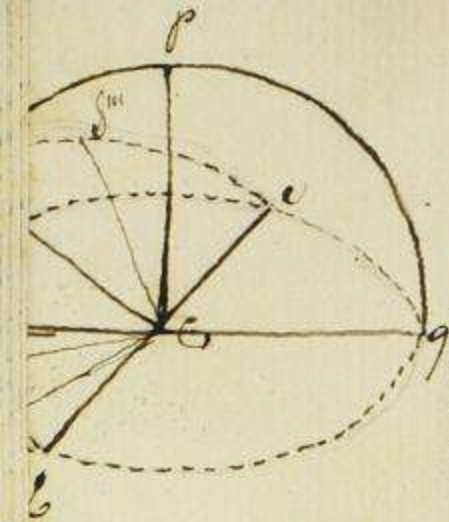
neira regular, mas desigual, e no intervallo de hum anno.

130. Ajuntando estas considerações, se conhecem no Sol dois movimentos proprios, hum parallelo, outro perpendicular ao equador, ou, que vem a ser o mesmo, devemos suppôr-lhe hum só movimento obliquo aos meridianos e aos parallelos, que produza ao mesmo tempo estes dois effeitos.

131. Se todos os dias transportarmos a hum globo as ascensões rectas e as declinações deste astro, acharemos que elle descreve hum circulo maximo da esfera celeste. Representámos este resultado na fig. 20, no qual EAA' nota o equador, AA', AA''... as ascensões rectas, e AS, A'S', A''S''... as declinações observadas do ponto O. A continuação dos pontos S, S', S''... determina o circulo maximo, obliquo ao equador que o Sol descreve sobre a esfera celeste. O calculo confirma este resultado muito exactamente, quando se determina pela trigonometria esferica as posições successivas do Sol. O circulo descrito por este astro remata nos dois tropicos ao norte e ao Sul. Esta he a *ecliptica*.

132. A ecliptica e o equador celeste, se cortão nos pontos equinociaes, ou equinocios, porque quando o Sol a elles chega, o dia he igual á noite em toda a terra. Os planos do equador e da ecliptica se cortão seguindo huma linha recta, que passa pelos pontos equinociaes, e que por isso se chama *linha dos equinocios*.

138. Em rigor o Sol está no equador hnm só instante, e logo se aparta por effeito do seu movimento em declinação. Mas sendo este movimento muito menos rapido que o da esfera celeste, não o percebemos, e no dia do equinocio o Sol nos parece descrever o equador, salvo se com instrumentos medirmos o seu caminho. O mesmo acontece aos differentes parallelos porque elle passa, e que parece descrever successivamente. Mas na realidade a marcha deste astro se compõe do seu movimento proprio e



do movimento da esfera celeste, de sorte que descreve em torno do eixo da terra huma curva spiral cujas revoluções se chegão, e se apartão successivamente do equador.

CAPITULO VI.

Modo de determinar a obliquidade da ecliptica e a posição dos pontos equinociaes.

134. PAra acabar de fixar no Ceo a posição da orbita solar, cumpre determinar exactamente a sua posição sobre o plano do equador que os astronomos tomão por plano primitivo nas suas observações. Para isto basta achar a inclinação mutua destes planos e os seus pontos de intersecção.

135. Podemos neste exame, fazer abstracção do movimento diurno da esfera celeste, que sendo commum ao equador e á ecliptica, não tem influencia alguma sobre as suas posições respectivas. Seja C (fig. 21) o centro da terra, QQ'Q'' o equador, ES*e* a ecliptica, E*e* a secção commum destes dois planos, ou a linha dos equinocios. Em fim, tiremos hum meridiano PSQ, cujo plano seja perpendicular a esta commum secção. Este meridiano cortará o plano do equador seguindo a recta CQ, a ecliptica seguindo CS, e o angulo SCQ será a obliquidade da ecliptica que se trata de determinar.

136. Ora, de todos os raios visuaes CS, CS', CS'', que se podem tirar successivamente do centro da terra ao Sol, nos differentes tempos do anno, CS he o que faz com o equador o maior angulo; e por consequencia a *obliquidade da ecliptica he igual á maior declinação do Sol.*

137. Para conhece-la, bastaria observar a altura meridiana do Sol, no dia do solsticio, se este acontecesse ao meio dia. Mas, como esta circunstancia só tem lugar em hum meridiano terrestre, seria difficil

confegui-la ; mas cumpre notar que quando o Sol fe chega ao tropico , as fuas alturas meridianas varião muito pouco de hum dia a outro , e no dia em que eftá no feu ultimo parallelo , perfifte fenfivelmente na mefma diftancia do equador. Affim , em qualquer lugar que fe tenha obfervado a maior declinação do Sol , ella poderá confiderar-fe como igual á obliquidade da ecliptica , ao menos approximadamente.

138. Confegue-fe o mefmo refultado , obfervando as alturas meridianas do Sol nos folfticios , e tomando metade da fua differença ; porque os raios vifuaes , tirados do centro da terra aos dois folfticios , devem fazer com o equador angulos iguaes , porque são dirigidos fegundo a mefma recta.

139. Defta maneira fe achou que a obliquidade da ecliptica no anno de 1800, era $23°27'58''$.

140. Huma linha recta perpendicular a efte plano , e tirada pelo centro da terra , fe chama *eixo da ecliptica* por analogia com o eixo do equador. Os dois pontos oppoftos , em que efta recta prolongada encontra a esfera celefte fe chamão *pólos da ecliptica.*

141. Sendo os eixos do equador e da ecliptica ambos perpendiculares aos feus planos refpectivos , o angulo que formão entre fi he igual á inclinação deftes planos. Affim a diftancia angular dos pólos da ecliptica ao plano do equador , he igual a $90°—23°27'58''$ ou a $66°32'2''$.

142. Os dois parallelos celeftes, que tem efta declinação de huma e outra parte do equador , fe chamão por efta razão *circulos polares.*

143. Conhecida a obliquidade da ecliptica , bafta obfervar huma fó declinação do Sol para achar a pofição dos pontos equinociaes. Com effeito feja C (fig. 22) o centro da terra , EQ o equador , ES a ecliptica , ou antes os grandes circulos da esfera celefte , fituados neftes planos. EC*e* , commum fecção da ecliptica e do equador , ferá a linha dos equinocios. Se S for a pofição do Sol em certo dia , conheceremos por obfervação a declinação AS ; então no trian-

gulo esferico SAE, rectangulo em A, teremos o lado AS e o angulo opposto SEA, igual á obliquidade da ecliptica. Logo poderemos pela trigonometria esferica calcular o lado EA, que he a ascensão recta do Sol relativamente ao ponto equinocial E (*a*).

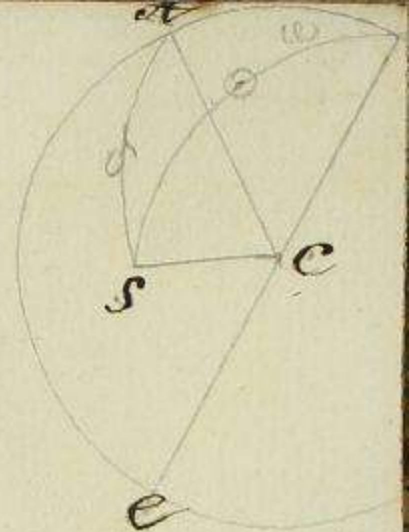
144. Se observarmos tambem, no mesmo dia, a differença de ascensão recta entre o Sol e huma estrella, que passa pelo meridiano depois delle, e ajuntarmos ao resultado o arco AE, teremos a ascensão recta da estrella relativamente ao ponto equinocial. Por tanto a posição deste ponto sobre o equador ficará rigorosamente determinada, bem como a do equinocio opposto *e*, que está em 180° de distancia. Repetir-se-ha esta operação hum grande numero de vezes para a mesma estrella, a fim de evitar os pequenos erros inseparaveis das observações, e tomando o meio entre todos os resultados, conhecer-se-ha a ascensão recta da estrella, e a posição da linha dos equinocios com summa exacção. As posições respectivas das estrellas no Ceo se suppõe conhecidas por observações precedentes; logo será facil referir as suas ascensões rectas aos pontos equinociaes, segundo o costume na Astronomia.

145. Será igualmente facil achar o lugar dos pólos na ecliptica no Ceo; porque já se conhecem os parallelos, em que elles estão. Sabemos mais que estão no mesmo plano perpendicular ao equador e á ecliptica, e por consequencia tambem perpendicular á linha do equinocio. O vestigio deste plano sobre o equador será por tanto distante 90° dos pontos equi-

---

(*a*) Sendo ω a obliquidade da ecliptica; δ a declinação do Sol, α a sua ascensão recta, e R o raio das taboas, he

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{tang.}\,\delta\,\text{cot.}\,\omega}{R}$$



nociaes. Aſſim a aſcenſão recta do pólo auſtral da ecliptica, ſerá 90°, a do pólo boreal 270, contando-ſe eſtas aſcensões rectas deſde o equinocio da primavera, e do occidente para o oriente, no ſentido do movimento do Sol.

146. O pólo boreal da ecliptica eſtá actualmente na conſtellação do dragão entre δ e ζ, porém mais proximo á ultima.

147. Determinada aſſim completamente a orbita ſolar, ſe póde calcular o lugar do Sol na ecliptica, ſó pelo conhecimento da ſua declinação. Com effeito conſideremos de novo o triangulo esferico ASE (Fig. 22). A poſição do Sol fica determinada pelo angulo SCE, que fórma o raio viſual SC com a linha dos equinocios. Iſto ſe chama *longitude do Sol*. Ora eſte angulo, ou o arco ES, que lhe ſerve de medida, he facil de calcular, quando ſe conhece a obliquidade da ecliptica e a declinação AS. Porque, ſendo $\odot$ a longitude do Sol, e conſervando as meſmas denominações acima

$$\text{ſen}\,\odot = \frac{R.\,\text{ſen}\,\delta}{\text{ſen}.\,\omega}.$$

Repetindo todos os dias a meſma obſervação e o meſmo calculo, conheceremos ſucceſſivamente os angulos deſcritos pelo Sol ſobre a ecliptica, partindo do equinocio, ou as longitudes do Sol.

148. Eſtas longitudes ſe contão ordinariamente do equinocio da primavera, e de 0° a 360°, no ſentido do movimento do Sol. Tomando a ſua differença de hum dia a outro, conheceremos o caminho diurno deſte aſtro ſobre o plano da ecliptica.

149. Quando ſe houver reunido hum grande numero de obſervações deſte genero, poderemos formar taboas, que indiquem adiantado para cada dia a longitude do Sol e a ſua declinação. Eſtas ſe chamão taboas do Sol.

150. Neſtas taboas, as differenças das longitudes

de hum dia a outro, poderão ser muito exactas, porque vem a ser as mesmas todos os annos, e se reproduzem na mesma ordem, o que permitte corrigi-las com o tempo. Se resta ainda alguma incerteza he só ácerca da epoca, em que o Sol haverá tido tal longitude; por exemplo, do instante, em que entra no equador. Poderá tambem haver alguma duvida sobre o verdadeiro valor da obliquidade. Assim, para aperfeiçoar as taboas, cumpre esmerar-se em rectificar estes dois elementos.

151. Logo o exame dos movimentos do Sol, como todos os problemas de astronomia, tem duas partes muito distinctas: a formação das taboas conforme os primeiros resultados observados; a correcção destas taboas supondo os seus elementos conhecidos proximamente.

152. O primeiro que se procura bem determinar he a obliquidade de ecliptica. Quinze dias antes e depois do solsticio, o astronomo começa a observar as alturas meridianas do Sol, para dellas concluir as declinações. A que elle observa no dia do solsticio seria a maior possivel, se o solsticio acontecesse ao meio dia; mas elle póde ter lugar meio dia mais cedo, ou mais tarde; neste intervallo a longitude varía quasi 29′42″, supondo o movimento medio do Sol de 59′24″, que he proximamente o seu valor medio. Ora, 29″42″ de erro em longitude dá 6″,4 de erro na declinação do solsticio. Tal he pois o maior erro, que se póde commetter determinando directamente pela observação a declinação

153. Mas, em lugar de 29′42″ de erro em longitude, supponhamos 17″,8; o da declinação solsticial diminuirá rapidamente, porque he proporcional ao quadrado do erro em longitude, logo será 10000 vezes menor, ou igual a 0,0006″. Ora 17″,8 de movimento corresponde a 7′,2 de tempo. Calculando o instante do solsticio pelas taboas, nas quaes o maior erro em longitude bem poucas vezes chega a 10″, teremos hum erro em declinação muito menor.

154. Podemos pois calcular com fumma exacção quanto faltará para que o Sol ao meio dia tenha a maior declinação. Ajuntando efta quantidade ao refultado obfervado no mefmo dia, conheceremos a declinação folfticial, ifto he, a obliquidade da ecliptica, com toda a exactidão, que fe póde efperar da obfervação, com a mefma precisão com que fe o folfticio aconteceffe mefmo ao meio dia.

155. Podemos fazer hum fimilhante calculo para os dias, que precedem, e que fe feguem; fempre com a mefma exactidão. Por tanto podemos affim ajuntar as obfervações de 20 e 30 dias, *reduzi-las ao folfticio*, por meio das taboas; e o refultado medio, deduzido da fua comparação dará com grande precisão a declinação folfticial.

156. Efte methodo feria perfeito, fe as refracções foffem bem conhecidas; mas huma prova de que ainda o não são inteiramente, he que a obliquidade obfervada de verão em huma grande altura, e a que fe obferva de inverno, quando o Sol eftá muito mais baixo, não concordão exactamente. Para conciliar tudo, devem-fe fazer algumas mudanças á taboa de *Bradley*, de que usão os aftronomos. A de *Delambre* diminue de 1'' a latitude do obfervatorio de Paris: e de 1'',5 a obliquidade de verão, augmentando de 5'',5 a de inverno, e tudo fica conforme. Mas efta taboa de refracções as dá muito fortes na vifinhança do horizonte.

157. Por efte methodo, affim correcto, e applicado com todo o cuidado imaginavel, *Delambre* achou a obliquidade da ecliptica para 1800 igual a 23°27'58'', como já differmos.

158. Paffemos agora aos equinocios: hum mez inteiro, metade antes; e metade depois do equinocio, fe obferva todos os dias a altura do Sol nas vifinhanças do meridiano, e fe conclue a declinação para cada dia. Com efta declinação e a obliquidade conhecida, fe tem a longitude do Sol; como refultaria da obfervação.

159. Comparando a longitude obfervada com o que dão as taboas, fe conhece o erro deftas. Defte modo fe confeguem 20 ou 30 obfervações defte erro, e fe toma hum meio arithmetico entre ellas. Com as taboas, correctas defte erro medio, fe calcula o inftante do equinocio; o que he facil, porque neffe inftante a longitude deve fer o, ou 180°, e como fe conhece o movimento diurno do Sol, bem como a fua diftancia ao equador, na vefpera do equinocio ao meio dia, bafta huma fimples proporção para faber quando alli ha de chegar.

160. Não querendo ufar das taboas, ver-fe-ha pela comparação das diftancias ao zenith obfervadas cada dia, a que hora, de que dia, a diftancia do Sol ao zenith deverá fer igual á altura do pólo. Efte ferá o inftante do equinocio,

161. Eftes methodos fuppõe fempre que fe conhece exactamente a altura do equador e as refracções. Entre tanto vimos pelas obfervações dos folfticios que a efte refpeito refta ainda alguma incerteza. Para a diffipar, obferva-fe do mefmo modo o equinocio oppofto, e toma-fe hum meio entre os erros das taboas, que daqui refultão. Com effeito he claro que o erro das refracções e das latitudes tem huma influencia contraria fobre a longitude, conforme o Sol fóbe, ou defce.

162. Para achar o comprimento do anno por eftas obfervações, devem comparar-fe com outras mais antigas, de cuja exactidão não haja duvida, ou ao menos cuja incerteza fique fufficientemente compenfada pela diftancia.

163. As que nos deixárão os antigos aftronomos não merecem muita attenção. Eftas obfervações fe fazião com *armillas*, que erão circulos de cobre dirigidos no plano dos circulos celeftes. Para determinar os equinocios, obfervavão o tempo, em que a fombra do circulo, que reprefentava o equador, fe comprehendia toda no plano defte circulo, mas he evidente que a refracção alterava mais ou menos o

refultado, fegundo a altura em que fe achava o Sol no inftante do equinocio. A mudança de refracção, mais rápida no horizonte que o movimento em declinação, os fez algumas vezes obfervarem dois equinocios no mefmo dia. Com effeito nafcendo o Sol pela manhã muito perto do equinocio, a refracção muito forte no horizonte poderá compenfar a fua diftancia, e faze-lo apparecer no plano do equador. Mas a refracção diminue rapidamente á medida, que os aftros fóbem; logo o Sol mais alto parecerá mais perto do feu verdadeiro lugar, e fe o feu movimento em declinação não houver compenfado efte abaixamento, tornará a apparecer abaixo do equinocio, pelo qual paffará no depois no mefmo dia.

164. Por efta, e por outras razões, fe póde duvidar fe os antigos equinocios valem a pena de fe calcularem. Se todavia quizermos daqui tirar partido para determinarmos o comprimento do anno, o methodo mais fimples he confiderar cada hum deftes equinocios como huma longitude obfervada, que he 0° na primavera, e 180° no outono. Calcular-fe-ha pelas taboas o lugar do Sol para a mefma epoca. Se a longitude verdadeira for differente de 0° ou 180°, a differença ferá o erro do movimento medio das taboas para o tempo corrido defde o antigo equinocio até nós. Efte erro, repartido pelo numero de dias paffados dará a correcção do movimento medio empregado nas taboas; efte movimento ficando affim rectificado, concluir-fe-ha o comprimento do anno por huma fimples proporção; o movimento diurno correcto eftá para hum dia, como 360° para o comprimento total do anno.

165. Não fe ganha muito em pefquizar eftas antigas obfervações, com as quaes não fe póde contar com meio dia de erro, o que faz 29′42″ fobre a longitude obfervada; com effeito 29′42″ divididos por 3000 annos dão 0″,9 por anno. Huma obfervação de *Bradley*, ou de *La Caille*, feita ha 50 annos, não admitte o erro de 5″; que repartidos por

eſte intervallo dão 0'',1 por anno. Tal era a incerteza, que reſtava ſobre o movimento medio do Sol. O que *Delambre* havia adoptado, ſeguindo a *Lallande*, para as ſuas taboas, era 36000°46' em 100 annos julianos de 365,25 dias ou ſimpleſmente 46', omittindo as 100 circumferencias inteiras, que não offerecem duvida alguma, a iſto ſe chama *movimento ſecular do Sol*. Daqui ſe deduz por huma ſimples proporção o tempo de huma revolução completa, que he $\frac{360^{\circ}.36525^{d}}{36000^{\circ}46'}$, ou $365^{d}5^{h}48'48''$. Eſte era o comprimento do anno tropico até agora adoptado; mas pelo ſeu novo trabalho, *Delambre* acha eſte movimento ſecular exceſſivo em 9'',98, o que o reduz a 36000°45'51'',02, e o verdadeiro valor do anno, que daqui reſulta he 365^{d}5 horas 48'50'',2. Eſte valor he o mais exacto.

166. Ainda que eſte excellente aſtronomo tenha calculado mais de 1200 obſervações para chegar a eſte reſultado, elle ainda o não publicou. Aguarda, para mais certeza, obſervar ainda mais equinocios.

167. Para não interromper a expoſição dos methodos, fui obrigado a paſſar em ſilencio algumas explicações, a que he neceſſario agora voltar.

168. Comparando as obſervações antigas com as modernas, ſe vê que o veſtigio da ecliptica no Ceo não tem paſſado ſempre pelas meſmas eſtrellas. As que antigamente eſtavão ſituadas ao norte deſte plano perto do ſolſticio de verão, eſtão agora mais perto do ſeu pólo boreal; pelo contrario as meridionaes, que eſtavão ſituadas perto do meſmo ſolſticio, ſe tem approximado á ecliptica. Similhantes deslocamentos tem tido lugar perto do ſolſticio de inverno. Todas as eſtrellas ſituadas na ecliptica participão deſtes deslocamentos, mas tanto menos quanto mais perto eſtão do equador. Eſtes phenomenos indicão evidentemente que a ecliptica ſe tem approximado ao equador deſde os antigos até nós; e com effeito,

fó a comparação das obfervações modernas, prova inconteftavelmente a diminuição progreffiva da fua obliquidade.

169. Efta diminuição he de 50'' por feculo. A theoria moftra que ella tem hum limite, depois do qual a obliquidade da ecliptica augmentará pouco a pouco, para depois decrefcer pelos mefmos gráos. Affim, efte movimento fe reduz a huma pequena ofcillação, e a ecliptica nunca coincidio, nem coincidirá nunca com o equador, phenomeno que, fe tiveffe lugar, produziria fobre a terra huma primavera perpetua.

CAPITULO VII.

Do calendario.

170. O Movimento do Sol determina os diverfos periodos empregados na fociedade para a diftribuição do tempo. A efcolha deftes periodos e a ordem defta diftribuição compõe o que fe chama *calendario.*

171. O tempo, que o Sol emprega em voltar ao mefmo folfticio, ou em geral ao mefmo ponto da ecliptica, fórma o *anno.* A fua duração tem em todos os tempos intereffado os homens. Com effeito era huma medida natural dos trabalhos, que requerem longos intervallos, e que dependem da mudança das eftações; o feu conhecimento era neceffario para a agricultura, o commercio e as viagens; affim tem-fe pofto muito cuidado em determina-lo.

172. O que fe offerece logo como mais fimples he faber quantos dias folares fazem hum anno, fem attender á defigualdade delles. Para o conhecer, baftaria pôr fobre huma meridiana hum eftilo vertical, e examinar todos os dias, ao meio dia, o comprimento da fombra: o dia, em que ella chega ao feu maior comprimento he o do folfticio de verão, e o nume-

ro de dias paſſados entre duas voltas conſecutivas do Sol ao meſmo ſolſticio, dá a duração inteira de ſua revolução. Acha-ſe deſte modo que o anno tropico contém pouco mais ou menos 365 dias, e he por eſte methodo que os primeiros aſtronomos parecem ter obſervado.

173. Ao principio contentarão-ſe com eſte reſultado, mas logo ſe conheceu a ſua inexactidão, accumulando-ſe os erros. Obſervando o meſmo ſolſticio muitos annos conſecutivos, ſe vê chegar mais tarde do que devêra, ſe o anno foſſe exactamente de 365 dias; o erro he de 15 dias em 60 annos, Por iſto ſe conheceu que o anno tem mais hum quarto de dia do que ſe ſuppozera ao principio, e tomou-ſe para ſua duração 365,25 dias.

174. Eſte valor, muito mais exacto que o precedente, eſtá ainda muito longe de ſer exacto. *Hiparco* comparando huma obſervação de ſolſticio feita por elle, com outra feita por *Ariſtarco*, 145 annos antes, achou que o ultimo ſolſticio havia acontecido meio dia antes do que devêra ſer, ſe o anno houveſſe ſido de 365,25 dias: logo havia meio dia de erro em 145 annos, ou o, 00345 dias por anno (4′58″); donde reſulta o comprimento do anno igual a 365,24655 dias, ou 365 dias, 5 horas, 55′2″.

175. Eſte meſmo valor ha miſter correcções, e o verdadeiro anno medio he 365 dias, 5 horas, 48′50″; a principal cauſa do erro he a inexactidão das obſervações dos ſolſticios. Com effeito as ultimas meridianas do Sol, perto daquella epoca, creſcem por gráos inſenſiveis, a ſombra do eſtilo ſegue os meſmos periodos, e he impoſſivel reconhecer exactamente o inſtante, em que o Sol deve chegar ao ſolſticio. Evita-ſe eſte inconveniente, determinando por obſervação duas epocas, nas quaes a altura meridiana do Sol he exactamente a meſma, e ſempre creſcente, ou decreſcente igualmente. O intervallo deſtas duas epocas dá a duração media da revolução inteira do Sol. Nas viſinhanças dos equinocios he que eſte genero de ob-

ſervações ſe faz com mais proveito, porque então as alturas meridianas do Sol mudão ſenſivelmente de hum dia a outro.

Hiparco obſervou muitos equinocios com eſte intento. Mas a imperfeição deſtes inſtrumentos era muito grande para que podeſſe concluir o comprimento do anno por obſervações tão proximas humas das outras; e era neceſſario eſperar grande numero de Seculos para que a ſua diſtancia compenſaſſe a ſua incerteza. Hoje que a perfeição dos inſtrumentos tem feito as obſervações muito mais ſeguras, eſte he ainda o methodo que os aſtronomos ſeguem para determinar o verdadeiro comprimento do anno. Depois veremos a maneira, com que elles o tem obſervado com a maior exactidão.

176. Para applicar eſtes reſultados á vida civil, e fazer vulgar o ſeu uſo, devem-ſe apreſentar deſembaraçados das fracções, que os acompanhão, e que os tornarião muito difficeis de conſervar.

177. A primeira idéa, que ſe offerece, he deſprezar as fracções; e os annos ficão ſendo de 365 dias. Aſſim erão antigamente, como já diſſemos, mas depois que ſe fez mais progreſſos na aſtronomia, ſe abandonárão, porque a ſua inexactidão era ſenſivel em pequenos intervallos.

178. O principal inconveniente conſiſtia em levar ſucceſſivamente o começo do anno a diverſas eſtações; porque a pequena differença 5 horas 48′50″ produz quaſi hum dia em quatro annos, e hum anno de 365 dias em 1508 annos, de ſorte que depois deſte intervallo ter-ſe-hia hum anno atrazado, e ſe tornaria a achar na meſma eſtação.

179. Parece que os Egypcios conhecêrão eſte periodo, mas fazião-no de 1460 annos, porque ſuppunhão o anno de 365 dias 6 horas. Iſto ſe chama *periodo ſothiaco*.

180. Tambem ſe podia fazer abſtracção do numero de dias que contem o anno, e conſiderar o principio e o fim como phenomenos aſtronomicos, que

ſe fixarião pela volta do Sol a hum meſmo equinocio. Tal he o anno actualmente eſtabelecido em França. Começa á meia noite, com o dia em que acontece o equinocio verdadeiro de verão em Paris. Cada anno ſe divide em 12 *mezes* de 30 dias, no fim dos quaes ſe ſeguem 5 dias chamados *complementares*. Eſte modo de contar os annos, tem por *era*, iſto he, por origem, o dia 22 de Setembro de 1792, dia da fundação da Republica. Por eſte methodo os annos não são já periodos de tempo faceis de decompôr em dias, o que he grandiſſimo defeito na chronologia, já embaraçada com outras muitas incertezas.

181. Para evitar eſte inconveniente ſe imaginou o methodo das *intercallações*. Conſiſte elle em dar ao anno civil 365 dias, havendo cuidado em corrigir o pequeno erro annual, antes que elle ſe accumule, e logo que chega a hum dia. Deſta maneira são mui frequentes as correcções; mas o *anno civil* nem por iſſo oſcilla em torno do anno verdadeiro além de limites pouco conſideraveis, e a influencia deſte erro nos trabalhos da ſociedade he inteiramente inſenſivel.

182. A *intercallação* mais ſimples he de hum dia cada quatro annos. Ella ſuppõe o anno medio de 365,25 dias, o que differe pouco da verdade. Eſta intercallação foi ordenada por *Julio Ceſar*, e delle tomou o nome de *correcção juliana*. Conforme eſte modo de contar, os *annos communs* são de 365 dias; repartidos em 12 mezes de 30 ou 31 dias, excepto Fevereiro, que tem 28. O dia intercallar, ſe põe no fim de Fevereiro cada quatro annos. Então o anno tem 366 dias, e toma o nome de *biſſexto*, de ſorte que, por eſta regra, ha ſempre tres annos communs entre dois biſſextos. Cem annos julianos de 365,25 dias, formão o *Seculo*, que he o periodo mais comprido, que ſe emprega na ſociedade para medida do tempo, e que até hoje baſta á chronologia.

183. Não ſe confunda a *correcção juliana* com o *periodo juliano*, inventado por *Scaligero*: eſte he hum periodo artificial, que ſerve para fixar a data dos

acontecimentos hiſtoricos, ſegundo as poſições ſimultaneas do Sol e da lua.

184. A intercallação juliana ſe tranſmittio a todos os póvos da Europa, mas a ſua era he differente da dos Romanos, que contavão da fundação de Roma. Na *era chriſtã* ſe contão os annos do naſcimento de Jeſu Chriſto, ou antes de hum certo anno fixado aſtronomicamente a noſſo reſpeito, e ao qual ſe refere eſte acontecimento, do qual ſenão ſabe exactamente a epoca, como provão as diverſas opiniões dos chronologiſtas (*a*). Mas iſto he indifferente para a progreſsão ſucceſſiva dos annos, e a origem da *era* he inteiramente arbitraria. Baſta que ſe tenha fixado hum ſó anno pela obſervação de algum phenomeno aſtronomico; ora, ſabe-ſe que no tempo do Concilio de Nicéa, o equinocio acontecia a 21 de Março, e ſegundo o calculo dos chronologiſtas, devião ter paſſado 325 annos depois da era chriſtã. Já não he neceſſario mais para fixar a chronologia depois deſta epoca, e referir todas as eras á chriſtã.

185. Continuou-ſe a contar deſta maneira até 1582; mas como ſe ſuppunha o anno de 365,25 dias, ſendo ſómente de 365,242245 dias, a pequena differença annual 0,007755 ſe havia accumulado, e havia produzido em 1257 annos, 9,74804 dias, iſto he perto de 10 dias, que ſe eſtava atrazado ácerca do anno ſolar. Por tanto os equinocios ſe affaſtavão ſucceſſivamente do inſtante do anno, a que os havia referido o Concilio de 325, e a differença he de quaſi hum dia em 132 annos. Iſto obrigou ao Papa Gregorio XIII a fazer huma nova mudança no Calendario, á qual ſe deo o nome de *reforma Gregoriana*.

186. Primeiro que tudo, reparou-ſe o atrazamento dos 10 dias; ordenando que o dia ſeguinte a 4

(*a*) D. Petav. *ration. temp. pars ſecunda*, pag. 16. Paris 1652 in 12.

de Outubro de 1582 fe chamaffe não 5, mas 15 de Outubro. Continuou-fe a empregar a intercallação juliana de hum dia cada quatro annos; de forte que todos os annos, cujo numero he divifivel por 4, são biffextos. Mas conveio-fe em fupprimir efte dia intercallar nos annos feculares 1700, 1800, e 1900, deixando-o fubfiftir no anno 2000, e affim em diante para fempre; de forte que a tres annos feculares communs fuccede fempre hum anno biffexto. Efta intercallação muito fimples he ao mefmo tempo muito proxima á exactidão; porque a differença annual 0 007755 dias, da intercallação juliana dá depois de 400 annos 3,1020 dias, ifto he, perto de 3 dias que fe devem ajuntar.

187. A maneira precedente de contar os annos fórma o que fe chama *calendario Gregoriano*, no qual o equinocio da primavera fempre acontece de 19 a 21 de Março. Elle não foi abraçado em fua origem por todos os eftados da Europa, o que motivava huma differença no modo de datar. Os que confervavão o calendario juliano contavão 10 dias menos que os outros de 1582 a 1700, onze dias de 1700 a 1800, e affim em diante. Mas, excepto a Ruffia, que conferva ainda o eftilo juliano, o calendario gregoriano he adoptado em todos os eftados chriftãos.

188. Repartio-fe o anno em quatro *eftações* analogas aos trabalhos da agricultura; são, a *primavera* o *verão*, o *outono*, e o *inverno*. A primavera fe conta da entrada do Sol no equador até chegar ao tropico de cancer: o equinocio que lhe ferve de origem, fe chama equinocio da primavera. O tempo que corre depois até á chegada do Sol ao equador, fórma o verão, e fe termina por hum novo equinocio, que he o do Outomno. Efta eftação fe eftende até a chegada do Sol ao tropico de capricornio, e a fua volta defte ponto ao equador fórma o inverno, que fecha o circulo do anno tropico.

189. Cada huma deftas eftações traz as producções

da natureza, huma nova ordem de phenomenos, analoga aos diverſos gráos de intenſidade do calor ſolar. A' medida que as alturas meridianas do Sol augmentão, os ſeus raios cahem mais a prumo ſobre o horizonte, e a terra conſerva mais o calor. Mas quando eſte aſtro ſe abaixa, os ſeus raios obliquos, já enfraquecidos pela atmosfera, reflectem em grande parte, e ſe perdem no eſpaço.

190. As alturas do Sol tem por tanto huma influencia decidida ſobre a temperatura. Entre tanto ellas ſe repetem ſucceſſivamente as meſmas durante a primavera e o eſtio, ainda que o calor não ſeja o meſmo neſtas duas eſtações. Iſto procede de que a impreſsão produzida pelo Sol, reſulta ao meſmo tempo da intenſidade da ſua luz, e da duração da ſua preſença. Quando o Sol ſe adianta no hemisferio boreal, a ſua acção começa apenas a exercer-ſe ſobre nós, e a terra a augmentar-ſe. Mas quando eſte aſtro deixa o tropico, ella tem ſoffrido muitos mezes de calor. Cada dia hum novo gráo ſe accreſcenta ao que ella já tinha; então he que os effeitos do aſtro que a aquenta ſe tornão mórmente ſenſiveis pela accumulação. Obſerva-ſe do meſmo modo que o maior calor do dia não he ao meio dia, mas duas horas depois.

191. O meſmo ſe deve dizer do outono á do inverno. Neſtas duas eſtações he igual o calor que o Sol envia; mas a terra eſtá differentemente diſpoſta a recebe-la. No outono, a ſua ſuperficie conſerva alguma couſa do calor do verão, que perde pouco a pouco, mas quando chega o inverno, a terra esfriada, eſtá coberta de neve e de gelo. Só póde aquecer-ſe lentamente pela acção prolongada dos raios do Sol.

192. Iſto ſe deve ſómente intender da ſuperficie da terra. A camada que eſtá abaixo do chão, em qualquer profundidade, não participa deſtas variações. Quando o Sol paſſa por cima della no verão, paſſa tempo conſideravel primeiro que ella ſinta o ſeu calor; reciprocamente eſte aſtro póde fazer a ſua re-

volução inteira, antes que a ſua partida lhe ſeja ſenſivel. Por tanto deve eſtabelecer-ſe no interior da terra hum eſtado medio, proporcionado á expoſição da ſuperficie exterior, e intermedio entre os maiores frios do inverno e os maiores calores do verão. A experiencia confirma eſte reſultado. Se tomarmos hum meio arithmetico entre as alturas do thermometro, obſervadas no meſmo paiz, durante huma longa cadêa de annos, eſte ſerá naquelle paiz a temperatura conſtante dos ſubterraneos.

193. As noções, que havemos adquirido ſobre o comprimento do anno, podem ſervir para achar o *movimento medio* do Sol na ecliptica, iſto he, o arco medio, que elle deſcreve neſte circulo no intervallo de hum dia. Porque comprehendendo a ſua revolução annual 360°, o ſeu caminho em hum dia ſerá $\frac{360^\circ}{365,242245}$ ou $59'8''$. Eſte reſultado ſerá humas vezes exceſſivo, outras minguado, e algumas exacto; mas no cabo do anno tudo ficará compenſado. Os geometras e os aſtronomos coſtumão ſujeitar deſta maneira couſas irregulares a regras exactas, que a ellas ſe approximão quanto he poſſivel, e que depois ſe modificão por correcções, de maneira que ſe encoſtem cada vez mais á verdade.

194. O meſmo methodo nos fará conhecer o movimento medio do Sol parallelamente ao equador, e como eſte aſtro gira o Ceo neſte ſentido no intervallo de hum anno, o ſeu caminho em hum dia ſerá $59'8''$. Como eſte atrazamento ſe ſomma com a rotação diurna do Ceo, o Sol não volta ao meridiano de hum a outro dia ſenão depois de deſcrever parallelamente ao equador $360^\circ 59'8''$. Por tanto ſe a duração media de hum dia ſolar for repreſentada por 24 horas, o tempo que eſte aſtro emprega em deſcrever o arco diurno $59'8''$, ſerá $\frac{24^h \times 59'8''}{360^\circ 59'8''}$, ou

3'55'', e mais exactamente 3'55'',87. Esta quantidade subtrahida de 24 horas dá 23h.56'4'' para o tempo da rotação diurna da esfera celeste expressa em tempo medio solar. A pequena differença 3'56'' he o excesso do dia medio solar sobre o dia syderal.

195. Se quizessemos tomar por unidade o dia syderal, o que muitas vezes se faz em astronomia, o dia medio solar seria expresso por $\frac{24^h}{23^h\,56'4''}$ ou 1,002737 dia syderal. A pequena differença 0,002737 (3'56'', ou antes 3'55'',93) exprimiria o excesso do dia medio solar sobre o dia syderal. He quanto se deve cada dia adiantar ácerca do Sol hum relogio regulado pelo movimento das estrellas.

196. O numero 3'55'',93 differe muito pouco de 3'55''87 que representa o mesmo arco 59'8'' contado em tempo medio solar. Isto vem da pequena differença que ha entre o dia medio solar, e o dia syderal, differença, que vem a ser quasi insensivel no pequeno arco 59'8'', que se trata de avaliar. Todavia o primeiro periodo he hum pouco maior que o segundo; he por isso que o mesmo intervallo he representado por hum numero menor no primeiro caso, do que no segundo.

197. He claro que hum pequeno erro no comprimento do anno teria huma influencia quasi insensivel sobre estes valores; em razão do grande numero de dias, pelos quaes se devia repartir o erro total. Tal he a vantagem dos resultados medios, quando se concluem de observações muito distantes entre si.

CAPITULO VIII.

Segunda approximação dos movimentos do Sol. Theorica do seu movimento elliptico.

198. HAvemos até aqui considerado o Sol como descrevendo cada anno hum circulo maximo da esfera celeste, havemos fixado a posição deste circulo, e já sabemos determinar por observação os angulos, que o Sol alli descreve. Mas estes resultados assim isolados não serião isentos de erro, ou de incerteza, e as suas mudanças, se as soffrem, só poderião ser correctas comparando-as de contínuo a novas observações. Para rectifica-los mais seguramente, e com mais facilidade, he necessario procurar a lei rigorosa, que os liga, ou ao menos alguma figura geometrica e calculavel, que se approxime quanto for possivel; porque a dependencia mutua dos resultados conhecida huma vez, a sua inexactidão dependerá só da determinação rigorosa de hum pequeno numero de elementos.

199. Esta dependencia está evidentemente ligada ao movimento real do Sol no espaço; procuremos pois determinar a lei, que elle segue.

200. Para isto cumpre reunir duas sortes de dados: o movimento angular do Sol, deduzido da medida das suas alturas; as variações de sua distancia, deduzidas do seu diametro apparente. Cotejemos as consequencias, que daqui resultão.

201. Em primeiro lugar, o movimento angular do Sol não he uniforme; humas vezes he mais vagaroso, outras mais apressado. Observações multiplicadas mostrão que a maior differença acontece nos dois pontos da ecliptica, situados hum no solsticio de inverno, outro no solsticio de verão.

202. No primeiro o Sol descreve cada dia na ecliptica 1°1′10″; e então a sua velocidade he a maxima.

203. No ſegundo deſcreve ſómente $57'11'',5$; e a ſua velocidade he a minima.

204. A velocidade media, entre eſtes dois extremos he $59'10'',7$.

205. Eſtes dois pontos correſpondem a declinações iguaes de huma e de outra parte do equador, e as ſuas aſcensões rectas differem 180°. Por tanto eſtão ſituadas na meſma linha recta, tirada pelo centro da terra e da esfera celeſte.

206. O diametro apparente ſegue os meſmos periodos que a velocidade angular, iſto he, augmenta, e diminue com ella, ainda que em razão maior. Chega ao ſeu maximo no ponto, em que a velocidade he maior, e então ſe obſerva ſer de $32'35''5$. O ſeu minimo he no ponto, em que he menor a velocidade, e então he $31'31'',5$. O medio he $32'3'',5$. Eſtas medidas devem ſer diminuidas de alguns ſegundos por cauſa da irradiação, que dilata hum tanto os diamemetros apparentes dos objectos; mas a quantidade exacta deſta diminuição não he bem conhecida.

207. Por eſtas obſervações ſe póde calcular a maior e a menor diſtancia do Sol á terra, ou ao menos avaliar a ſua razão; porque he ſabido que as diſtancias de hum meſmo objecto são reciprocas aos ſeus diametros apparentes. Se compararmos aſſim o maior e o menor diametro apparente do Sol, a ſua razão

ſerá $\frac{32'35'',5}{31'31'',5}$ ou 1,3416; iſto he, que ſe repreſentarmos por 1 a menor diſtancia do Sol á terra, a maior terá por expreſsão 1,03416. O meio arithmetico entre eſtas diſtancias he 1,01708. Se a quizermos tomar por unidade, como fazem os aſtronomos,

a menor por expreſsão $\frac{1}{1,01708}$ ou $1-\frac{0,01708}{1,01708}$, e

a maior $\frac{1,03416}{1,01708}$, ou $1+\frac{0,01708}{1,01708}$, que vem a dar

1—0,01679 ou 0,98321 e 1,01679. Logo a *diſtancia do Sol á terra varía annualmente, para mais ou para menos, huma quantidade proximamente igual a cento e ſeſſenta e oito decima milleſſima parte do ſeu valor medio.*

208. Os pontos da orbita ſolar, que correſpondem á menor e á maior diſtancia do Sol á terra, ſe chamão *perigeo* e *apogeo* (*), que ambas ſe chamão *apſides.*

209. Cotejando eſtes reſultados, ſe vê que a velocidade do Sol parece augmentar quando ſe approxima á terra, e diminuir quando ſe affaſta. Mas ainda não ſabemos ſe eſtas variações são reaes ou apparentes; porque, ſó porque o Sol ſe approxima, os arcos, que elle deſcreve na ſua orbita, nos devem parecer maiores; quando ſe affaſta, devem parecer menores. Para os comparar com exactidão, cumpre reduzi-los a huma meſma diſtancia. O arco, que tem por medida $57'11''$, e que o Sol deſcreve no ſeu apogeo, appareceria maior, ſe foſſe obſervado no apogeo (*a*). Para o reduzir a eſte caſo, baſta multiplica-lo pela razão inverſa dos raios neſtes dois pontos, iſto he, por $\frac{32'35'',5}{31'31'',5}$ ou 1,03416; porque as ſuas grandezas apparentes ſerião reciprocas á ſua diſtancia. Acha-ſe deſte modo por medida deſte arco

(*) περι, em torno, γεα, terra, απω, longe, ſuppondo a terra girando e o Sol immovel, ſe diz que a terra eſtá *aphelia*, quando mais longe do Sol, e perihelia, quando mais perto, que tem origem das meſmas propoſições, e da palavra Ηλιος, Sol. Αψις, curvatura.

(*a*) Seja r a diſtancia perigea do Sol, r' a ſua diſtancia apogea, x a grandeza apparente do arco $59'8''$ reduzido ao perigeo, teremos $\frac{x}{57'11''} = \frac{r'}{r}$, donde ſe

59'8'', viſto na diſtancia perigea. Ora, o arco deſcrito realmente neſte ponto pelo Sol he 1°1'10'', como acima vimos, e excede ainda o precedente em 2'2''; logo a diminuição apparente do movimento do Sol do perigeo não he puramente optica, e conſequencia do augmento da ſua diſtancia; ella procede tambem de que a marcha deſte aſtro ſe torna mais lenta á medida que elle ſe affaſta da terra.

210. Comparando da meſma ſorte, em outras epocas do anno, o movimento angular do Sol e o ſeu diametro apparente, ſe acha eſta lei geral: *o angulo deſcrito cada dia, multiplicado pelo quadrado da diſtancia, dá hum producto quaſi conſtante.* Reſulta daqui que o movimento angular ſe entibia proximamente, como augmenta o quadrado da diſtancia (*a*).

---

tira $x = \frac{r'}{r} \cdot 57'11''$.

Ora $\frac{r'}{r} = 1{,}03416$, como vimos, logo $x = 57'11''$. $1{,}03416 = 59'8''$.

(*a*) Com effeito, ſeja r a diſtancia do Sol á terra, v a ſua velocidade angular diurna, iſto he, o angulo que elle deſcreve em hum dia, em fim A huma conſtante. A lei, que reſulta das obſervações, he

$$r^2 v = A$$

ſupponhamos que r^2 ſe converta em $r^2(1+u)$, ſendo u huma quantidade muito pequena que repreſentará as variações do quadrado da diſtancia; ſeja tambem v' o augmento de v, as quantidades $r^2 + r^2 u$, e $v+v'$, que ſe correſpondem, deveráõ ſer ligadas entre ſi pela fórmula precedente, o que dá

211. Defcoberta affim huma lei fimples, que fe eftende com pequenos erros a hum grande numero de obfervações diftantes, fe póde confiderar como mais exacto que as mefmas obfervações; porque fe não foffe realmente a lei da natureza, fora neceffario hum grande acafo para que ella reprefentaffe tam-

---

$$v+v'=\frac{A}{r^2(1+u)}$$

Ora, defenvolvendo $\frac{1}{1+u}$ pela divisão, fe acha $1-u+u^2-u^3\ldots$ &c.
Subftituindo efte valor na equação precedente, e apagando v e $\frac{A}{r^2}$, que fe deftroem, fica

$$v'=-\frac{Au}{r^2}+\frac{Au^2}{r^2}-\frac{Au^3}{r^2}\ldots\ \&c.$$

Nefte refultado fe póde fem erro fenfivel defprezar as potencias de u fuperiores á primeira, porque u he huma fracção muito pequena. Affim teremos fimplesmente

$$v'=-\frac{Au}{r^2}.$$

Vê-fe que v' he negativo, quando u he pofitivo, e reciprocamente. Por confequencia a velocidade angular diminue, quando a diftancia augmenta muito, e reciprocamente.

De mais v' he proporcional a u; ifto he, ao augmento do quadrado da diftancia; por confequencia a velocidade angular diminue muito proximamente como o quadrado da diftancia augmenta.

bem as obſervações, e pelo contrario he ſummamente provavel que ella ſe apartaria cada vez mais das meſmas obſervações. A probabilidade ſe converte em certeza, quando ſe multiplica exceſſivamente o numero das tentativas; e a aſtronomia eſtá neſte caſo.

212. Partindo deſte ultimo reſultado ſe podem calcular as razões das diſtancias do Sol á terra, em dois pontos quaeſquer da ſua orbita, ſem recorrer ás obſervações do ſeu diametro apparente: porque eſtas diſtancias ſerão reciprocas ás raizes quadradas dos angulos diurnos deſcritos na ecliptica (*a*). Por exemplo, a diſtancia perigea ſendo 1, a diſtancia apogea ſerá $\frac{\sqrt{(1^\circ 1' 10'')}}{\sqrt{57' 11'',5}} = 1{,}0341$; como ſe deduziria dos valores 1,0168; 0,9832, que repreſentão eſtas diſtandias, como acima achámos.

Tambem he claro que iſto ſó he verdade por approximação, ſuppondo que v e r varião ambos muito pouco. Ora no movimento do Sol ſempre ſe ſatisfaz a eſta condição, porque as diſtancias apogea e perigea, que são as mais differentes, ainda são quaſi iguaes, bem como as velocidades diurnas neſtes dois pontos.

(*a*) Com effeito, ſejão r, r' duas diſtancias do Sol á terra, v, v' os angulos diurnos, que lhes correſpondem, teremos

$$r^2 v = A, \; r'^2 v' = A.$$

Por conſequencia

$$r'^2 v' = r^2 v,$$

o que dá

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{v'}}.$$

213. Isto traduzido em geometria mostra huma lei muito notavel do movimento do Sol. Tiremos do centro da terra a este astro huma recta, que chamaremos *raio vector*. Esta recta descreverá cada dia na orbita solar hum pequeno sector, cuja área será, com pouca differença, igual á metade do producto do angulo diurno pelo quadrado do raio vector (*a*).

(*a*) Seja C (fig. 23) o centro da terra, CS, CS′ os raios vectores, CSS′ o sector descrito. A área deste sector será comprehendida entre as dos sectores circulares CSP, CS′Q, descritos do ponto C como centro, com CS e CS′ como raios. Supponhamos o pequeno angulo SCS′ $= a$, CS $= r$, e CS′ $= r(1+\delta)$; sendo δ quantidade muito pequena, que he o incremento de r, teremos

$$\text{Sector CSP} = \frac{r^2 a}{2}$$

$$\text{Sector CS'Q} = \frac{r^2 a}{2}(1+\delta)^2.$$

$$\text{Sector CS'Q} - \text{Sect. CSP} = \frac{r^2 a}{2}(1+2\delta+\delta^2-1)$$

$$= \frac{r^2 a}{2}(2\delta+\delta^2) = \text{Sector CSP}(2\delta+\delta^2).$$

A differença por tanto depende só da quantidade δ, que representa o incremento do raio vector do Sol. Ora este augmento he de 0,034 do perigeo ao apogeo, isto he, no intervallo de meio anno. Logo he menor que 0,00018 no intervallo de hum dia. Assim a differença dos sectores CS′Q, CSP, vem a ser muito proximamente igual a sector CSP.0,00036, isto he, não chega á $\frac{36}{100000}$ do sector CSP. Logo

Logo eſta área he conſtante, e a área total traçada, partindo de hum ponto fixo, creſce como o numero de dias paſſados. Donde reſulta eſta conſequencia: *as áreas deſcritas pelo raio vector do Sol são proporcionaes aos tempos.* He huma das grandes leis que *Kepler* deſcobrio; e que ſerve de baſe á theoria do Sol e dos planetas.

214. Seguindo eſta lei, e ajuntando as obſervações dos angulos diurnos, ſe póde traçar a curva, que o Sol deſcreve no plano da ecliptica. Para iſto, de hum ponto dado, que repreſenta o centro da terra e da esfera celeſte, ſe tirão ſobre hum plano rectas, cuja diſtancia he igual ao movimento angular do Sol. Eſtas rectas repreſentão os raios viſuaes tirados cada dia a aquelle aſtro. Tomão-ſe na ſua direcção, contando do ponto fixo, as diſtancias correſpondentes do Sol á terra, calculadas ſegundo o movimento

---

eſta differença he quaſi nulla, e os ſectores CSP, CS'Q são quaſi iguaes, e como o pequeno ſector elliptico CSS' he maior que o primeiro e menor que o ſegundo, ſegue-ſe que a ſua ſuperficie tambem differe muito pouco de $\frac{r^2 a}{2}$, iſto he, que *no intervallo de hum dia* ella he ſenſivelmente igual á metade do producto do angulo diurno pelo quadrado do raio vector.

Eſta igualdade he tanto mais exacta, quanto menor he o intervallo de tempo comprehendido entre os raios vectores, de ſorte que ſe poderá ſempre tomar tão pequeno, que o erro reſultante deſta ſuppoſição ſeja menor que qualquer grandeza dada.

Eſtas razões ſe conformão muito exactamente, quando ſe avalião as áreas dos ſectores ellipticos, por meio das fórmulas rigoroſas, que a analyſe fornece para eſte objecto.

11 *

diurno, tomando huma dellas por unidade. Os pontos determinados desta maneira, indicão cada dia o lugar do Sol e a curva, que os ajunta, he a orbita deste astro.

215. Tomemos por exemplo as 24 observações seguintes, feitas em *Greenwich* por *Maskeline*, e calculadas por *Delambre* nas Memorias de Berlim.

Datas das Observaç.	*Tempo medio.*	*Longitudes.*	*Differenç. dos tempos.*	*Differ. das Longitud.*
Janeiro 12	0h 18′ 8″	292° 13′ 37″	24h 0′ 23″	1° 1′ 6″
13	0 18 31	298 14 43		
Fever. 17	0 23 41	328 43 47	23 59 55	1 4 17
18	0 23 36	329 48 4		
Março 14	0 18 43	353 45 49	23 59 44	0 59 37
15	0 18 27	354 45 26		
Abril 28	0 6 33	37 57 13	23 59 50	0 58 15
29	0 6 23	38 55 28		
Maio 15	0 5 19	54 23 11	24 0 0	0 57 27
16	0 5 19	55 20 38		
Junho 17	0 9 36	85 59 5	24 12	0 56 57
18	0 9 48	86 56 2		
Julho 18	0 14 58	115 33 16	24 0 4	0 57 13
19	0 15 2	116 30 29		
Agosto 26	0 10 48	152 58 49	23 59 45	0 57 56
27	0 10 33	153 51 45		
Setemb. 22	0 1 55	179 14 57	23 59 39	0 58 49
23	0 1 34	180 13 46		
Outub. 24	23 53 30	211 54 24	23 59 54	1 0 1
25	23 53 24	212 54 25		
Nov. 18	23 54 58	237 2 4	48° 0 30	2 1 24
20	23 55 28	239 3 28		
Dez. 17	0 5 51	265 28 14	24 0 30	1 1 7
18	0 6 21	266 29 21		

216. Eſtas longitudes são contadas de huma meſma linha recta, tirada do centro da terra ao equinocio da primavera. A differença das obſervações relativas ao meſmo mez, dá os angulos diurnos, e as raizes quadradas das razões deſtes angulos, fazem conhecer as diſtancias do Sol á terra, neſtas differentes epocas. Referindo eſtas diſtancias ao inſtante intermedio entre as duas obſervações de cada mez, ſe formou a taboa ſeguinte, na qual ſe tomou por unidade a diſtancia do Sol, que correſponde á velocidade angular media 59′11″ (a).

(a) Eſta taboa he calculada pela fórmula ſeguinte: ſeja v o movimento para 24 horas, r a diſtancia á terra, ſerá

$$r = \frac{\sqrt{(59'11'')}}{v}.$$

Empreguei as obſervações, quaes ſe achão referidas, e ſem alguma correcção. Por conſequencia he provavel que eſtes reſultados difirir nas ultimas decimaes dos que ſe empregão nas taboas, os quaes eſtão ligados pela theoria, e deduzidos de hum tão grande numero de obſervações, que os menores erros ſe compensão mutuamente.

Devo tambem advertir que a diſtancia, a que correſponde a velocidade angular media 59′11″, não he a diſtancia do Sol á terra; mas huma quantidade hum pouco menor. Com effeito, ſe tomarmos a diſtancia media por unidade, e chamarmos y a que correſponde á velocidade angular 59′11″, teremos comparando-a com a velocidade apogea

$$\frac{y}{1{,}0163} = \sqrt{\frac{(59'8'')}{59'11''}},$$

Datas das Obſervações.			*Longitude do Sol.*			*Diſtancia da terra.*
Janeiro	12 a 13		292	44	10	0,98448
Fevereiro	17 a 18		329	15	56	0,98956
Março	14 a 15		354	11	48	0,99630
Abril	28 a 29		38	26	20	1,00800
Maio	15 a 16		54	51	54	1,01234
Junho	17 a 18		86	27	33	1,01654
Julho	18 a 19		116	1	52	1,01719
Agoſto	26 a 27		152	25	17	1,01042
Setembro	22 a 23		179	44	21	1,00283
Outubro	24 a 25		212	24	24	0,99303
Novembro	18 a 20		238	2	46	0,98849
Dezembro	17 a 18		265	58	47	0,98415

Eſtes dados ſerviráõ para conſtruir a fig. 25, que repreſenta a orbita annual do Sol.

217. Eſta curva he hum pouco alongada no ſentido da recta, que ajunta as obſervações dos mezes de Janeiro e Julho; por conſequencia he neſtes pontos que ſe acha o perigeo e o apogeo. A ſimilhança deſta orbita com huma ellipſe deu lugar a compara-los, e ſe reconheceu que na verdade a *orbita ſolar he huma ellipſe, da qual a terra occupa hum dos focos.*

218. A diſtancia do centro de qualquer dos focos ſe chama *excentricidade*; e a diſtancia dos extremos do pequeno eixo aos focos ſe chama *diſtancia media.*

---

que dá $y = 0{,}99958$, valor hum pouco menor que a unidade. Mas vê-ſe ao meſmo tempo que a differença he ſummamente pequena, o que procede de ſerem quaſi iguaes as diſtancias apogea e perigea do Sol.

219. Na ellipse solar, segundo as observações, que havemos empregado, sendo o semieixo ou a distancia media 1, a distancia apogea he 1,0168. Tirando a primeira da segunda, vem a excentricidade 0,0168. Ella não seria de 17 millesimos de huma vara em huma ellipse, que tivesse de eixo maior huma vara. Por isso he tão pouco sensivel na fig.; mas no Ceo, em que a media distancia do Sol á terra excede a 34 milhões de legoas, como depois veremos esta excentricidade tem mais de 500 mil legoas de comprido.

CAPITULO IX.

Modo de determinar a posição da ellipse solar sobre o plano da ecliptica.

220. PAra achar a posição da ellipse solar procura-se o lugar do apogeo e do perigeo. Estes pontos são já conhecidos de huma maneira approximada, segundo as observações diurnas, porque a velocidade angular nesses pontos he a menor ou a maior. Mas póde ainda ficar huma indeterminação de meio dia no instante preciso, em que o Sol por alli passa. Para os conseguir mais exactamente, se nota que o Sol deve empregar meio anno para hir de hum destes pontos ao outro, e que a differença das longitudes deste astro he de 180°. A reunião destas propriedades pertence exclusivamente ao grande eixo da orbita solar, porque se tirarmos pelo centro da terra outra linha recta, que corte esta orbita em dois pontos; a differença de longitude destes dois pontos será igual a 180°; mas o tempo empregado pelo Sol para chegar de hum ao outro, differirá de huma meia revolução annua. Será maior, se o arco descrito contiver o apogeo, onde o movimento he mais lento; menor, se contiver o apogeo onde o movimento he mais rapido.

221. Jámais acontece haver observações, que differão exactamente de 180°, e cujo intervallo seja huma

meia revolução annua; mas qando ſe tem achado as obſervações, que melhor ſatisfazem ás condições requiſitas, ſe lhe fazem, ſegundo o movimento conhecido do Sol, as pequenas correcções neceſſarias para ter os tempos e as longitudes verdadeiras (*a*).

222. Applicando eſtas conſiderações ás obſervações de *Maskelyne*, *Delambre* achou a longitude do apogeo para 1780 igual a 99°8′20″. O Sol paſſou por eſte ponto da ſua orbita a 31 de Junho aos 18′47″, tempo medio em Paris.

223. Comparemos eſtes reſultados a obſervações mais antigas em 1690, *Flamſteed* havia achado a longitude do apogeo igual a 97°35′. Logo eſte ponto da orbita do Sol ſe adiantou 1°33′20″ em 90 annos, o que faz 62″,2 por anno. A theoria da attracção dá 62″,05 (*b*), e ella ſe deve conſiderar como mais ſegura do que a obſervação, quando ſe trata de quantidades tão pequenas.

224. O grande eixo da orbita ſolar não he por tanto fixo no Ceo, elle ſe adianta annualmente 62″,05 no ſentido do movimento do Sol.

225. Quando eſte aſtro tem voltado ao ponto da ecliptica, em que o apogeo ſe achava o anno precedente, o apogeo ſe tem affaſtado já, e o Sol deve ainda deſcrever 62″,05 antes de o alcançar. O tempo neceſſario para iſto he $\frac{62'',05}{360^\circ} \cdot 365,24225$, ou 25′11″ a razão da circumferencia inteira por anno. Na verdade a ellipſe ſolar não fica inteiramente immovel neſte intervallo, e o apogeo ſe affaſta hum pouco do Sol em quanto eſte aſtro o alcança, mas o ſeu movimento he tão lento, que ſe póde deſprezar

(*a*) *Delambre*, memoria ſobre as taboas do Sol, Academia de Berlim 1785.

(*b*) Mechanica Celeſte tom. III, pag. 109.

em hum tempo tão curto, e com effeito em 25′11″ elle defcreveria $\frac{25'11''.62'',05}{365,24225}$, quantidade menor do que hum centefimo de fegundo.

226. Por huma confequencia neceffaria deftes phenomenos, o Sol emprega hum pouco mais de hum anno tropico para voltar ao apogeo ou ao perigeo da fua orbita. A differença he igual a 25′11″ e a duração da revolução ácerca dos apfides he 365 dias, 24225+25′11″, ou 365 dias 6h.14′1″. Chama-fe efta *revolução anomaliftica*, porque fe chama *anomalia* do Sol a diftancia angular defte aftro ao apogeo da fua orbita.

227. Efte periodo differe fenfivelmente da revolução tropica, por tanto he aquelle que fe deve empregar para determinar o lugar do apogeo com exactidão fegundo as obfervações annuas.

228. O grande eixo da ellipfe folar, tendo hum movimento progreffivo fobre o plano da ecliptica, devia em certa epoca coincidir com a linha dos equinocios, e em outro tempo lhe foi perpendicular. Eftas epocas são faceis de determinar, porque fe conhece a pofição actual defte eixo e o feu movimento (*a*).

229. Segundo as obfervações de *la Caille*, a longitude do perigeo em 1750, era 278°37′16″.

230. Quando o eixo maior era perpendicular á linha dos equinocios, efta longitude era de 270°.

231. A differença he 8°37′16″, que a razão de 62″,05 por anno, fazem hum numero de annos igual a $\frac{8^\circ 37'16''}{62,05''} = \frac{31036''}{62,05''} = 500$ annos proximamente.

232. Logo efte phenomeno aconteceu no anno de

(*a*) Mechanica celefte tom. III. pag. 113.

1250. Então o perigeo do Sol coincidia com o folfticio de inverno, e o apogeo com o folfticio de verão. Veja-fe fig. 26.

233. Do mefmo modo, quando o eixo maior coincidia com a linha dos equinocios, a longitude do perigeo era de 180°.

234. Defde efta epoca até 1750, ella fe tem adiantado 98°37′16″. O numero de annos neceffarios para efte deslocamento he $\frac{35503600}{6205}$, ou perto de 5722, o que leva efte phenomeno a perto de 4000 antes da era chriftã. Por hum encontro muito fingular he pouco mais ou menos a effe tempo que, fegundo a maior parte dos chronologiftas, fóbem os primeiros veftigios do homem fobre a terra; ainda que aliás hum grande numero de provas phyficas provão que a terra he muito mais antiga.

235. He claro que o mefmo phenomeno tornará a acontecer, quando o perigeo folar houver chegado a 360°; ifto he, quando houver defcrito 90°—8°37′16″, defde 1750; e partindo dos refultados precedentes, fe vê que para ifto he neceffario hum numero de annos expreffo por 5722—2.500, ou 4722, o que leva efte phenomeno a 6472.

236. Então o perigeo folar coincidirá com o equinocio da primavera em quanto na pofição contraria, coincidio com o equinocio do outono. Neftes dois cafos a linha dos folfticios, que he fempre perpendicular á dos equinocios, era parallela ao eixo menor da ellipfe folar.

Em geral, he claro que a linha dos folfticios não correfponde dois annos confecutivos aos mefmos pontos da orbita do Sol.

237. Quando o eixo maior AP (fig. 26) he perpendicular á linha dos equinocios; o equador *Ee* divide a ellipfe em duas porções defiguaes, da qual a menor fica do lado do perigeo. Logo efta parte deve defcrever-fe mais promptamente do que a outra, porque

a sua extensão he menor, e as superficies descritas são proporcionaes aos tempos. Esta circunstancia, junta ao deslocamento do eixo maior, faz variar a duração das estações.

238. Na occasião desta posição do Sol em 1250, o perigeo coincidia com o solsticio de inverno. Então, o tempo passado desde o equinocio da primavera E até o solsticio de verão, era igual ao intervallo desse solsticio ao equinocio do outono; e por tanto a primeira era igual ao verão, e o outono ao inverno.

239. No tempo de *Hiparco*, ou 140 annos antes da era christã, o apogeo estava menos adiantado do que em 1750 huma quantidade igual a 62'',05.1890, ou 32°34'34''. Logo a longitude do perigeo naquella epoca era 246°2'42''. A ellipse se achava disposta pouco mais ou menos como se vê na fig. 27, e o angulo PTS era de 23°57'17''. O intervallo ES' do equinocio da primavera ao solsticio de verão era de 94 dias e meio, e o intervallo deste solsticio ao equinocio do outono era de 92 dias e meio, segundo as observações daquelle grande astronomo. A primavera então era mais comprida que o verão, e o inverno maior que o outono.

240. Agora a posição da ellipse he qual se vê na fig. 28. O angulo PTS he de 9°28'58'' em 1800, e se tem por intervallos das diversas estações:

Do equinocio da primavera ao solsticio do verão	92^d	21^h	44'28'',
Do solsticio de verão ao equinocio do outono	93	13	34 47,7
Do equinocio do outono ao solsticio de inverno	89	16	47 20,3
Do solsticio de inverno ao equinocia da primavera	89	1	36 23

Logo a primavera he menor que o verão, e o verão maior que o inverno.

241. Em quanto o perigeo folar ficar da parte do equador, em que actualmente eftá, a primavera e o verão fomados, ferão maiores que o outono e o inverno. Nefte feculo, a differença he perto de 7 dias, como fe póde ver nos valores precedentes. Eftes intervallos ferão iguaes no anno de 6472, quando o perigeo tocar o equinocio da primavera; depois paffará por elle, e a primavera e o verão fomados ferãa menores que o o outono e inverno.

242. Eftes phenomenos não terião lugar fe o movimento do Sol foffe circular e uniforme, todas as eftações ferião iguaes entre fi, e jámais fe notaria nellas differença. Logo a excentricidade da orbita, ainda que muito pequena, tem huma influencia fenfivel na duração das eftações. O deslocamento do eixo maior, bem que muito lento, produz as variações obfervadas nos differentes Seculos, variações, que não percebemos na curta duração da noffa vida, mas das quaes as gerações fucceffivas foffrem realmente os effeitos. He efta a vez primeira que temos occafião de demonftrar a applicação da aftronomia ao eftado paffado do Ceo e ao feu eftado futuro. Por efte motivo efpero que me feja perdoado haver entrado em algumas particularidades.

CAPITULO X.

Correcção dos movimentos ellipticos, e conftrucção das taboas do Sol.

243. A Pofição da ellipfe folar e fua excentricidade ficão conhecidas pelo que eftá dito. Se o foffem exactamente, deduzir-fe-hia pelo calculo a marcha do Sol.

244. Mas póde reftar ainda muita incerteza fobre a excentricidade. Nós a deduzimos da comparação dos diametros perigeo e apogeo, e as obfervações deftes diametros versão fobre pequenas qnantidades

affectas da irradiação, das quaes ainda não sabemos desembaraça-las. Aliás este methodo não seria praticavel ácerca dos planetas, cujo diametro apparente he muito pequeno. Assim, para obter este elemento com toda a precisão necessaria, se deve procurar hum resultado no qual tenha huma influencia mais continua e mais sensivel. Nós o acharemos nas variações do movimento angular do Sol.

245. A lei fundamental deste movimento he que as areas descritas pelo raio vector, são proporcionaes aos tempos. Se a orbita do Sol fosse circular e sem excentricidade, as areas iguaes corresponderião a angulos iguaes, e o movimento deste astro seria uniforme. As desigualdades, que nelle se observão, são por tanto o effeito necessario da excentricidade da orbita. Ellas tem relação com esta excentricidade, e a sua extensão depende da sua grandeza. Ora, ellas se podem observar muito exactamente por meio dos excellentes relogios, que hoje temos; logo podemos esperar determinar, por este meio, a excentricidade com muito mais exactidão do que pela observação directa.

246. Para termos huma idéa clara destas desigualdades, cumpre conceber o movimento do Sol como composto de hum movimento circular e uniforme, que faz a parte principal, e de huma correcção dependente da excentricidade da ellipse, que modifica este primeiro valor.

247. Ora, se quizermos pintar geometricamente estas considerações, imaginemos hum Sol ficticio (fig. 29) movendo-se uniformemente em torno da terra, sobre huma circumferencia, cujo raio seja igual á distancia perigea. Demos a este astro ficticio hum movimento medio, igual ao do verdadeiro Sol; de forte que, havendo partido ambos do perigeo, voltem alli ambos depois de huma revolução inteira, e sigamo-los desde este ponto. Em quanto o Sol ficticio se move uniformemente, o Sol verdadeiro S se move de huma maneira desigual, formando com a distancia perigea sectores de ellipse proporcionaes ao

tempo. Como no principio elle tem a maior velocidade, elle precede o Sol *s*; mas o feu movimento affrouxa á medida que fe aparta do perigeo; chega hum momento em que a fua marcha he a mefma que a do fegundo Sol, e depois efte fe lhe approxima, e o alcança no apogeo A, onde chegão ao mefmo tempo. O contrario tem lugar voltando para o perigeo. Então o Sol ficticio S′ fe adianta ao Sol verdadeiro; mas pouco depois efte augmenta em velocidade, achegando-fe ao perigeo; chega hum momento em que andão igualmente, depois o verdadeiro Sol, que accelera cada vez mais, fegue o outro de mais perto; e a final os dois aftros fe ajuntão no perigeo, onde os feus movimentos medlos tropicos os conduzem ao mefmo tempo.

248. Por confequencia, fe imaginarmos dois raios vectores tirados ao mefmo tempo do centro da terra aos dois foes, o angulo formado por eftas rectas ferá primeiramente nullo no perigeo; elle augmentará depois até certo termo em que elle chegará ao feu maior valor, depois diminuirá até o apogeo, onde outra vez ferá nullo, e dalli até o perigeo, variará em fentido contrario pelos mefmos gráos. Logo efte angulo he a correcção, que fe deve fazer ao movimento circular, para ter o movimento elliptico do Sol; chama-fe *equação da orbita*, ou *equação do centro*, porque he coftume chamar *equação* em aftronomia as quantidades, que fe devem ajuntar ou tirar aos refultados medios, para ferem iguaes os verdadeiros.

249. Do perigeo até o apogeo, a equação do centro fe deve ajuntar ao movimento medio do Sol; do apogeo até o perigeo, fe deve fubtrahir. De mais, ha dois pontos na orbita, em que ella chega ao feu maior valor. Ora o calculo moftra que quando fe conhece efte valor, delle fe póde immediatamente deduzir a excentricidade (*a*), e he facll determinar efte *maximum* por obfervação, como himos ver.

(*a*) A formula he efta. Seja E a maior equação do

250. Com effeito, neſtes pontos, os dois ſois ſe movem alguns inſtantes com a meſma velocidade. Logo o movimento do Sol verdadeiro he igual ao ſeu movimento medio tropico, ou a 59'8'',3. A eſte caracter ſe conhece a epoca da maior equação.

251. Ha dois pontos ſimilhantes na orbita, e como a ſua figura he ſymmetrica, he abſolutameute neceſſario que elles eſtejão poſtos ſymmetricamente de huma e outra parte do eixo maior, como na fig. 29, em que são deſignados por S e S'. Alem diſto, a equação do centro he additiva antes da paſſagem do Sol pelo apogeo, e ſubtractiva depois:

---

centro; e a excentricidade; faça-ſe $\frac{E}{57°7'44'',8} = \alpha$, teremos a excentricidade pela ſerie

$$e = \frac{1}{2}\alpha - \frac{11}{768}\alpha^3 - \frac{587}{93040}\alpha^5 - \frac{40583}{2642411520}\alpha^7 + \ldots$$

A quantidade α he ſempre huma fracção muito pequena, pricipalmente no Sol. Se ſuppozermos com *Laplace*, $E = 1°7'36'',5$, no principio de 1750, teremos

$$\alpha = \frac{1°7'36'',5}{57°4'44'',8} = 0,03\,3629,$$

que dá $\frac{1}{2}\alpha = 0,016814$.

O ſegundo termo $\frac{11\alpha^3}{768}$ he menor do que 0,000001, e por conſequencia inſenſivel, logo teremos, parando no primeiro,

$$e = 0,016814.$$

o denomina[...]
he a relação
diametro a ci[...]
ferencia ava[...]
em graus p[...]
da proporção
360° : 2R :: 3,1415

donde ſe ſegue que, em ambos os caſos, o Sol verdadeiro eſtá mais perto do apogeo do que o Sol ficticio, como repreſenta a meſma figura.

252. Eſta figura moſtra que, ſe podeſſemos calcular os angulos STS', sTs'; a ſua differença ſeria igual á ſomma dos angulos STs, S'Ts'; ou ao dobro da maior equação do centro, porque, em razão da ſymmetria da orbita, os dois angulos STs, S'Ts' devem ſer iguaes.

253. Ora, ſe repreſentarmos por Ee a linha dos equinocios, o angulo STS' he facil de calcular. He a differença das longitudes verdadeiras ETS, ETS' do Sol, obſervadas nos pontos da maior equação.

254. O angulo sTs' não tem mais difficuldade. He o angulo que o Sol deſcreveria em virtude do ſeu movimento medio tropico durante o meſmo intervallo de tempo. He igual á differença das *longitudes medias*, dando eſte nome ás longitudes, que o Sol teria neſtas duas epocas, ſe o ſeu movimento foſſe uniforme.

255. Aſſim, *havendo duas longitudes verdadeiras do Sol obſervadas nas epocas da maior equação, a differença do movimento verdadeiro ao movimento medio tropico, no meſmo intervallo he o dobro da equação do centro.*

256. Em tudo iſto não attendemos ao deslocamento progreſſivo da orbita ſolar. Entretanto influe ſobre as poſições do Sol relativamente ao eixo maior da ſua ellipſe. Por effeito deſte deslocamento, a longitude obſervada na primeira epoca, vem a ſer muito pequena; e para reduzi-la ao meſmo ponto da ellipſe, a que ella correſpondia a principio, ſeria neceſſario ajuntar-lhe todo o movimento do perigeo, durante o intervallo da primeira á ſegunda obſervação. Aſſim o angulo STS' deduzido da differença das longitudes verdadeiras tem de mais a meſma quantidade. Mas a differença deſtas longitudes medias ſe acha augmentada da meſma maneira. Logo o erro deſapparece do reſultado final, que he a differença dos dois

precedentes, e tudo ſe reduz á regra muito ſimples que havemos dado,

257. Por exemplo, diſcutindo as obſervações de *Maskeline* em 1775, ſe acha a longitude do Sol, a 2 de Abril ás 0h.12'55'', tempo medio em Paris, 12°33'39''. O Sol naquella epoca eſtava muito perto da ſua maior equação, circunſtancia indicada pelo ſeu movimento diurno.

258. A 30 de Setembro ſeguinte ás 23h.58'55'' a longitude do Sol era 188°5'44'', e tambem eſtava muito perto da ſua maxima equação.

259. A differença das duas longitudes he 175°32'5''. A differença das epocas he 182 dias. A primeira obſervação he mais adiantada 12'55''; a ſegunda atrazada 1'5''; o que faz 14', que ſe devem ſubtrahir de 182 dias; o reſto 181 dias 46' he o intervallo das obſervações.

O movimento medio tropico correſpondente a eſte intervallo he . . $\dfrac{360^\circ.181^d\,23^h\,46'}{365^d\;5^h\,48'50''}$

Ou	179°22'41''
O movimento verdadeiro he igual a	175 32 5
A differença	3°50 36

O que dá para a maior equação do centro 1°55'18''.

260. Para que eſte reſultado foſſe inteiramente exacto, ſeria neceſſario que as duas longitudes obſervadas, o foſſem preciſamente nas epocas da maior equação, o que he pouco provavel. Mas o erro he ſempre muito leve, porque perto daquella epoca, o Sol verdadeiro e o Sol medio ſeguem hum ao outro quaſi com a meſma velocidade, durante alguns dias, e a equação do centro varia muito pouco. Entretanto para obter hum reſultado mais exacto, ſe opéra

13

$1^d : 59', 8'',3 :: 181^d, 23^h, 46' : x$
para o movimento medio tropico
attendendo a differença da fracção
95 que dá para um dia.

nefte cafo como nas obfervações do folfticio. Calcula-fe pelas taboas, o que falta á longitude obfervada para chegar á da maior equação, o que fe póde fazer com muita exacção, pelo valor da excentricidade conhecido pouco mais ou menos (*a*). Affim fe reduzem a efta epoca muitas obfervações que a precedem e que a feguem poucos dias. Todas eftas obfervações dão a equação do centro, qual fe deveria obfervar, fe houveffe acontecido mefmo ao meio dia; e hum meio arithmetico entre todos eftes refultados, faz conhecer muito exactamente o feu valor. He pou-

(*a*) Para ifto bafta calcular a anomalia correfpondente á maior equação do centro; porque efta anomalia fommada com a longitude do apogeo, ou tirada defta longitude, dará as duas longitudes do Sol, que correfpondem aos pontos da maior equação. Seja e a excentricidade, u a anomalia procurada, a fórmula que a dá he

$$u = 90^\circ - 57^\circ 17' 44'',8 \left\{ \frac{3}{4}e + \frac{21}{168}e^3 + \frac{3409}{40960}e^5 + \frac{97875}{1835008}e^7 + \ldots \right\}$$

No Sol temos $e = 0,0168$.

O termo $\frac{21}{128}e^3$ ferá menor que $0,000001$, e o termo que daqui refulta no valor de u ferá menos de $0,0001$, por tanto póder-fe-ha defprezar, e ter-fe-ha fimplesmente

$$u = 90^\circ - 57^\circ 17' 44'',8 . \frac{3e}{4}$$

que dará

$$u = 90^\circ - 0^\circ 43' 18'' 3 = 89^\circ 16' 41'',2$$

he a anomalia do Sol correfpondente á maior equação do centro. He menor que 90°, mas differe pouco.

co mais ou menos desta maneira que *Delambre* a achou igual a $2°7'31'',7$ no anno de 1775. Daqui se deduz immediatamente a excentricidade 0,016803 na mesma epoca.

261. As observações, que havemos examinado, dão lugar a huma advertencia importante. As epocas que as separão distão huma da outra quasi 182 dias, isto he, meio anno. Logo he necessario que os raios vectores correspondentes se achem quasi em linha recta: e como sabemos que fazem angulos iguaes com o eixo maior da orbita, elles devem ser quasi perpendiculares a esse eixo. Assim a anomalia, que corresponde á maior equação, differe pouco do angulo recto. O calculo mostra que esta circunstancia depende de pequenhez da excentricidade (*a*).

252. A comparação das observações prova que a equação do centro diminue quasi uniformemente. A theoria da attracção tem confirmado esta diminuição, e feito conhecer o seu valor mais exactamente do que o poderião fazer as observações. Elle he de $18'',8$ por Seculo (*b*).

263. Este phenomeno suppõe huma diminuição analoga na excentricidade da orbita solar, porque estas duas quantidades são reciprocamente dependentes, e devem crescer e diminuir ao mesmo tempo, porque se a excentricidade fosse nulla, a equação do centro tambem seria nulla. A theoria mostrando esta dependencia, mostra a diminuição correspondente da excentricidade. Ella he 0,000045553 por Seculo (*c*) to-

(*a*) Veja-se a nota precedente.

(*b*) Mechanica Celeste. Tom. III. pag. 90.

(*c*) Póde-se facilmente calcular pelas fórmulas da Nota numero 249, porque a diminuição secular do equação do centro, sendo $0,018'',8$, a diminuição correspondente da excentricidade he

$$\frac{18'',8}{\frac{1}{2}\,57°7'47,8''}$$

mando por unidade o femi-eixo maior, ou a diſtancia media. São 1548 leguas em 100 annos, ou 15 leguas e meia por anno, avaliando em 34000000 de leguas a diſtancia media do Sol á terra. He claro que fracções, que parecem quaſi inſenſiveis no Ceo, referidas a medidas noſſas vem a ſer muito conſideraveis.

264. Se eſta diminuição foſſe ſempre progreſſiva, a ellipſe ſolar ſe converteria a final em huma circumferencia de circulo, e continuando a diminuir a excentricidade, a terra, depois de grande numero de Seculo, cahiria ſobre o Sol. Mas a theoria da attracção prova que as variações da excentricidade e da equação do centro, são periodicas; de ſorte que depois de haver diminuido até certo termo, a excentricidade creſcerá outra vez, tornando a ter os meſmos valores. Aſſim ella oſcillará em limites, cujo periodo ainda não ſe conhece muito bem, mas que ſe ſabe deverem ſer muito apertados: e tudo perſiſtirá aſſim eternamente, ſalvo ſe alguma cauſa externa e deſconhecida vier mudar o eſtado actual do ſyſtema do mundo, e modificar as leis, que nelle obſervamos.

265. Em geral, quando determinamos por obſervação os elementos da orbita ſolar, os achámos ſujeitos a variações muito lentas e quaſi inſenſiveis. Para calcularmos eſtas variações, comparámos os elementos obſervados em epocas muito remotas, e concluimos as modificações progreſſivas a que eſtão ſujeitos. Mas no calculo ſempre os conſideramos ſeparadamente, ſendo que elles effectivamente eſtão ligados huns aos outros, de ſorte que as ſuas alterações tem entre ſi certa dependencia; deſte modo, por exemplo, o lugar do apogeo, influe na indagação da maior equação, que tambem depende da excentricidade. Por tanto cumpre attender a eſtas relações para conſeguir de huma maneira exacta a variação dos elementos.

266. A analyſe moſtra eſta dependencia, e os methodos, que ella emprega para a deſcobrir são muito

ſublimes para poderem aqui ter lugar ; mas ſuppondo o conhecimento deſtas relações , ſe póde facilmente comprehender como ſe póde a ellas ſatisfazer, e eu o vou explicar de melhor grado , porque he de alguma ſorte revelar o ſegredo da exactidão actual das taboas aſtronomicas , e a conformidade , que exiſte nos ſeus reſultados.

267. O eſpirito do methodo conſiſte em corrigir de huma vez os elementos , e todos juntamente por hum grande numero de obſervações , como 1000 a 1200. Para iſto , ſe faz primeiro variar cada elemento á parte huma pequena quantidade , e ſe calcula a mudança, que daqui reſulta em todos os outros, Então repreſentando a verdadeira correcção por huma indeterminada , ſe obtem por huma ſimples proporção, a expreſsão analytica da ſua influencia. Fazendo a meſma operação em todos os elementos , ſe conſeguem para cada hum delles , valores que contém os reſultados indeterminados das correcções de todas as outras. Por eſtes valores ſuppoſtos ſe calculão as expreſsões analyticas dos lugares do Sol em differentes epocas , deſprezando os quadrados e os productos deſtas pequenas correcções , que por ſua pequenhez não podem ter influencia alguma. Comparando eſtes reſultados com hum grande numero de obſervações eſcolhidas entre as mais exactas , ſe tem outras tantas equações, a que as correcções devem ſatisfazer, e que por eſta razão ſe chamão *equações de condição*. Se as obſervações tiveſſem huma exactidão geometrica , baſtaria formar tantas deſtas equações quantos elementos ha para corrigir. Mas como ellas ſempre são affectas de alguns pequenos erros , o numero dellas ſuppre a ſua imperfeição. Conbinão-ſe ſucceſſivamente as equações de condição , da maneira mais favoravel á determinação de cada elemento , e deſte modo ſe conſegue conhecer com a maior exactidão os ſeus valores ſimultaneos , e as variações muito lentas , que elles ſoffrem , ás quaes ſe dá o nome de *deſigualdades ſeculares*.

268. Os elementos da ellipse solar bem determinados, resta só construir as taboas, isto he, calcular adiantado para cada dia o lugar do Sol. A analyse fornece para isto methodos directos e rigorosos que fazem conhecer o valor do raio vector e da longitude em função do tempo, partindo de huma epoca e de huma posição dada.

269. Não he possivel expôr aqui os calculos, que convém a estes valores geraes; vou sómente dar huma idéa da sua fórma e do uso que delles se faz.

270. Reconhecemos precedentemente que o movimento do Sol se póde considerar como composto de hum movimento circular, que faz a parte principal, e de huma correcção dependente da excentricidade.

271. Pelo que fica dito se percebe que a expressão analytica do raio vector deve ser composta de duas partes; a primeira constante e igual ao semi-eixo maior da ellipse, ou á *distancia media* do Sol á terra, a segunda variavel, e que representa os augmentos, ou diminuições dessa distancia nos diversos pontos da orbita.

Do mesmo modo, a expressão da longitude verdadeira deve conter huma parte proporcional ao tempo, e relativa ao movimento circular, com huma correcção, dependente do movimento elliptico; e que he a equação do centro.

272. Estas correcções do raio vector e da longitude, são periodicas; e se renovão, pelos mesmos gráos, em cada revolução annual. A analyse os representa por senos e cosenos de angulos, que crescem proporcionalmente ao tempo. Com effeito, estas quantidades são igualmente periodicas; porque o seno de hum angulo, nullo, quando o angulo he nullo, cresce depois até 90°, em que toca o seu maximo; dahi decresce até 180°, onde he outra vez nullo; passa depois abaixo do diametro, onde toma os mesmos valores, mas em sentido contrario. Os cosenos tem huma marcha analoga. Logo estas quanti-

dades são proprias para repreſentar valores periodicos, e a theoria da atracção moſtra que ſe podem exprimir deſta maneira todas as deſigualdades dos movimentos celeſtes. A experiencia ſó haveria conduzido ao meſmo reſultado; porém por hum caminho mais lento: porque *Lagrange* provou que, ſe muitas quantidades ſe ſeguirem regularmente, ſe poderá ſempre deſcobrir a lei: mas para iſto he neceſſario que as obſervações ſejão exactiſſimas, ou pelo menos contenhão erros muito pequenos (*a*). Logo a theoria do movimento elliptico fornece o meio de prevenir, neſta parte, as obſervações, e de anticipar a ſerie dos tempos.

273. Em fim, como as correcções do movimento circular do Sol são muito pequenas, porque dependem da excentricidade, a analyſe as dá em *ſeries* de termos, ordenados ſegundo as potencias da excentricidade, e por conſequencia cada vez menores. Eſtas fórmulas ſe achão na Nota.

274. Os valores abſolutos do raio vector e da longitude dependem dos elementos da ellipſe, e como elles mudão com o tempo, em razão das deſigualdades ſeculares, as taboas conſtruidas ſobre os ſeus valores actuaes, não poderião ſervir além de hum tempo muito breve. Para evitar eſte movimento, ſe ajuntão ás taboas as correcções, que a variabilidade dos elementos deve a final introduzir, e deſta maneira ellas ſe podem eſtender a hum grande numero de Seculos, antes e depois da epoca, para que são calculadas.

275. Comparando os reſultados deſtas taboas com longas ſeries de obſervações muito exactas, ſe conheceu que o movimento elliptico do Sol não baſta inteiramente para repreſenta-los. Deſta maneira ſe tem deſcoberto naquelle movimento pequenas deſigual-

---

(*a*) Memorias da Academia, para 1772, p, 513.

dades, que ao principio ſenão havião percebido, e que ſe chamão *perturbações*. A theoria da attracção tem feito conhecer as ſuas leis, e tem dado a grandeza de algumas. Calcularão-ſe os valores das outras pelo methodo das equações de condição, e ajuntarão-ſe ás taboas eſtes reſultados, como outras tantas correcções, que ſe devem fazer ao movimento elliptico.

276. Para completar eſtas noções, reſta-me moſtrar em poucas palavras a conſtrucção deſtas taboas, e o modo de uſar dellas.

A epoca, que lhes ſerve de origem, e de que ellas partem he 31 de Dezembro ao meio dia, tempo medio, nos annos biſſextos. Introduzio-ſe eſta differença para poder tranſportar facilmente os movimentos medios das taboas, de hum anno ao outro. Com effeito, ſupponhamo-los calculados para hum anno commum, e que ſe quer paſſar dahi a hum anno biſſexto, para o qual ſe conſervou a meſma epoca de 31 de Dezembro. Nada haverá que mudar nos dois primeiros mezes porque os lugares do Sol tornão a ſer os meſmos depois de hum anno, mas no fim de Fevereiro do anno biſſexto, dever-ſe-ha ajuntar o movimento para hum dia, por cauſa do dia intercalar, que ſe põe naquella epoca. Logo a longitude do Sol ſe achará augmentada deſta quantidade, e perpetuando-ſe eſte augmento até o fim do anno, ſerá neceſſario para empregar os reſultados dos annos precedentes, adianta-los hum dia, nos ultimos dez mezes. Pelo contrario, ſe tomaſſemos o primeiro de Janeiro para epoca do anno biſſexto, as longitudes medias do anno precedente terão de mais hum dia nos dois primeiros mezes, e ſerá neceſſario diminui-las deſta quantidade para as accommodar ao anno biſſexto; mas no fim de Fevereiro, a addição do dia intercalar ſuppre a eſte atrazamento, e fica conforme para o reſto do anno. Eſta differença de epocas he por tanto util para ſimplificar o calculo de hum anno a outro, Por eſta razão ſe adoptou geralmente.

277. Como o inſtante em que ſe conta meio dia

não he o mesmo em paizes, que não tem a mesma longitude, cumpria para ligar as observações, concordar em huma epoca commum, que fosse fixa por hum phenomeno astronomico instantaneo. Para isto se escolheu o instante da passagem do Sol pelo apogeo da sua orbita.

278. Conhecido este instante, ajunta-se á longitude do Sol o movimento medio até 31 de Dezembro, ou primeiro de Janeiro ao meio dia, e se tem a longitude media do Sol para aquella epoca, ou a *epoca das taboas*. Com effeito, quando o Sol he apogeo ou perigeo, o seu lugar verdadeiro coincide com o seu lugar medio, e a longitude verdadeira he igual á media.

Ajuntando cada dia a este resultado o movimento diurno do Sol, ter-se-ha a longitude ao meio dia para todos os dias do anno.

279. Por exemplo, segundo as observações de *Maskeline*, calculadas por *Delambre*, o Sol passou pelo seu apogeo a 30 de Junho de 1780 as 0 horas 18'',43'', tempo medio em Paris. A sua longitude era 99°8'50'',7. Logo esta era ao mesmo tempo a sua longitude media.

280. Deste momento até 31 de Dezembro de 1780 ao meio dia medio, passarão 183 dias 23 horas 41'17'', que a razão de 360° por hum anno tropico, dão $\frac{360^{\circ}.183^{d},987002}{365,242250}$, ou 181°20'46'',5, augmento da longitude media naquelle intervallo.

281. Ajuntando este resultado ao precedente, se tem 280°29'37'',2. He a epoca das taboas do Sol para o anno de 1781.

282. Neste intervallo o apogeo se tem deslocado huma quantidade igual a $\frac{62''.183,987002}{365,242250}$ ou 31'',2.

Deve-se ajuntar este resultado á longitude do apogeo a 30 de Junho de 1780. Ter-se-ha a longitude

99°9'21'',9. Esta quantidade he a que se acha nas taboas.

283. Quando se conhece a epoca para hum anno, he facil obte-la para o anno seguinte. Basta ajuntar o movimento medio do Sol para 365 dias se se trata de anno commum, e para 366, se se trata de bissexto. No primeiro caso he 359°45'40'',4, no segundo 360°44'48'',8. Lançando do resultado as circumferencias inteiras, a somma he a epoca procurada. Achão-se estas epocas calculadas nas taboas para hum grande numero de annos adiantados.

284. Supponhamos agora que se pede o lugar elliptico do Sol para 28 de Janeiro de 1781 ao meio dia, tempo medio em Paris. O intervallo deste instante á epoca he 28 dias, que dão $\frac{360°.28}{365,242250}$,

ou	27°35'53'',2
Ajuntemos a longitude da epoca, que, he	280°29'37,2
Temos a longitude media do Sol para o instante pedido igual a .	308° 5'30'',4
Passemos ás desigualdades.	
A longitude do apogeo na epoca era	99° 9'21'',9
O seu movimento em 28 dias he . .	4,8
Longitude do apogeo no instante pedido	99° 9'26'',7
Se tirarmos este resultado da longitude media, teremos a distancia media do Sol ao apogeo da sua orbita, isto he, a anomalia que teria lugar, se o seu movimento fosse uniforme. Isto se chama anomalia media, he	208°56' 3'',7
Conhecida esta quantidade, as taboas dão a equação do centro, que lhe corresponde	56'53'',3
Sommando-a com a longitude media a 28 de Janeiro ao meio dia, teremos	309° 2'24'',1

Longitude verdadeira naquella epoca, ou o lugar elliptico do Sol.

Neſte calculo não fizemos caſo das perturbações. A eſte reſpeito podem conſultar-ſe as taboas do Sol inſeridas na terceira edição da Aſtronomie de *Lallande*.

CAPITULO XI.

Sobre a deſigualdade dos dias, e a equação do tempo.

285. AGora, que conhecemos exactamente a marcha do Sol, e as dimensões de ſua orbita, deve ſer poſſivel calcular o arco, que elle deſcreve, parallelamente ao equador, cada dia do anno. Se compararmos eſte movimento real e variavel com o ſeu movimento medio, a differença ſerá a *equação do tempo*. Póde-ſe pois calcular eſta equação ſó pela theoria, o que he muito vantajoſo, porque ella ſe obtem deſte modo muito exactamente ſem haver miſter recorrer ás obſervações; e de mais, como ſe conhecem os elementos de que ella ſe compõe, ſe podem prever as variações, a que ella eſtá ſujeita.

286. Comparemos o dia ſolar com algum periodo fixo, por exemplo, com o dia ſyderal, e vejamos no que differem. Se imaginarmos dois meridianos tirados pelos dois extremos do arco da ecliptica, que o Sol deſcreve em hum dia, oarco do equador, que eſtes meridianos interceptão, he a differença procurada; porque quando a rotação da esfera celeſte acaba, falta ainda que eſte pequeno arco do equador atraveſſe o plano do meridiano, antes do Sol paſſar por elle. Ora, eſte arco nem ſempre tem o meſmo comprimento, como logo provaremos, e por iſſo he que os dias ſolares não são iguaes.

287. Ainda o não ſerião no caſo em que o Sol deſcreveſſe a ecliptica com o movimento uniforme, deſcrevendo cada dia arcos iguaes. Com effeito, por cauſa da obliquidade da ecliptica, eſtes arcos tomão

fucceffivamente diverfas inclinações relativamente ao equador. No tempo dos equinocios, elles cortão efte plano debaixo de hum angulo igual á obliquidade da ecliptica; porque a fua direcção he então perpendicular á linha dos equinocios, que he a commum fecção da ecliptica e do equador. Pelo contrario, no tempo dos folfticios, elles vem a fer parallelos á mefma recta. Logo os meridianos tirados pelos extremos dos arcos diurnos, perto do folfticio, são mais defviados do que o ferião fe comprehendeffem o mefmo arco da ecliptica, perto dos equinocios; e como o apartamento deftes meridianos mede fobre o equador os atrazamentos fucceffivos do Sol, eftes atrazamentos são defiguaes, e menores nos equinocios do que nos folfticios. Veja a Nota II.

288. A outra caufa de defigualdade provém das variações diarias do movimento do Sol; porque ellas augmentão, ou diminuem os arcos diurnos, que o Sol defcreve fobre a ecliptica, o que tambem altéra o apartamento dos meridianos, e o comprimento dos arcos do equador, comprehendidos entre elles.

289. He por tanto claro que a defigualdade dos dias folares refulta de duas caufas diftinctas, a obliquidade da ecliptica e a defigualdade do movimento proprio do Sol. Eftas duas caufas tem cada huma fua acção á parte, de maneira que feria neceffario deftrui-las ambas, para que os dias folares foffem iguaes; ifto he, feria neceffario que o movimento do Sol na fua orbita foffe uniforme, e que o plano da ecliptica coincidiffe com o equador. Ora, demonftra-fe pela theoria da attracção que ifto nunca ha de acontecer.

290. Para calcular as defigualdades dos dias folares, e formar o valor da equação do tempo, he neceffario calcular os arcos, que o Sol defcreve cada dia na ecliptica, projectar eftes arcos no equador; e tirar o movimento medio diurno; a differença dará a equação do tempo, que convem a cada dia do anno.

291. Para reprefentar os refultados pela geometria,

ſe imagina hum Sol fi˜ticio, que deſcreve o circulo maximo da ecliptica com movimento uniforme, e que paſſa pelo apogeo e perigeo ao meſmo tempo, que o Sol verdadeiro. Eſte aſtro ficticio he iſento das deſigualdades do movimento elliptico. Imagina-ſe depois hum terceiro Sol, que paſſa pelos equinocios ao meſmo tempo que o ſegundo, e que ſe move no equador com movimento uniforme, de maneira que as diſtancias angulares dos dois aſtros ficticios no equinocio da primavera são conſtantemente iguaes entre ſi. Logo o effeito da obliquidade da ecliptica deſapparece neſte terceiro Sol; e como já ſe corrigio a deſigualdade do movimento proprio, pela primeira ſuppoſição, a ſua marcha não tem irregularidade alguma; ella mede o *tempo medio* dos aſtronomos.

292. *Dia medio* he o intervallo de tempo comprehendido entre duas paſſagens conſecutivas deſte Sol ficticio, pelo meridiano, e *meia-noite* ou *meio-dia medios* são os inſtantes da ſua paſſagem. O momento, em que elle chega ao equinocio, determina o *equinocio medio*; elle ſe conſegue por huma ſimples proporção, quando ſe conhece a longitude do perigeo, e a epoca em que o Sol verdadeiro ſe acha nos apſides. O tempo comprehendido entre duas paſſagens conſecutivas pelo meſmo equinocio medio, fórma o *anno medio tropico*, que contém 265,24225, como acima achámos. Elle differe alguma couſa do anno verdadeiro, no qual o deslocamento progreſſivo da orbita ſolar produz leves mudanças, porque a velocidade do Sol he deſigual nos differentes pontos da ſua ellipſe, que chegão ſucceſſivamente ao equinocio. Veja-se a Nota IV.

293. Em geral he facil achar o lugar do Sol medio no plano do equador em qualquer inſtante dado; porque baſta calcular para eſſe inſtante, o valor da longitude media, e eſta longitude referida ao plano do equador, he a aſcensão recta do Sol medio; ou a *aſcensão recta media* do Sol.

294. Tambem ſe póde determinar a projecção do

Sol verdadeiro ſobre o plano do equador, pela obſervação, ou calculo da aſcensão recta, porém, porque a ſua marcha he deſigual, e a do Sol medio he uniforme, eſtes dois aſtros, em geral, não eſtão no meſmo meridiano, e a aſcensão recta media differe da aſcensão recta verdadeira. Eſta differença reduzida a tempo, a razão da circumferencia por dia, indica o intervallo, em que o Sol verdadeiro ſegue ou precede ao outro; por tanto he a *equação do tempo*; ella he humas vezes additiva, outras ſubtractiva; e por huma propriedade muito notavel, por ſi meſma ſe deſvanece quatro vezes no anno.

295. Para perceber a razão deſte phenomeno, lembremo-nos que, ſe tomarmos ſobre a ecliptica dois arcos iguaes, o primeiro perto do equinocio, o ſegundo perto do ſolſticio, e os referirmos ao equador, tirando meridianos pelas ſuas extremidades, os arcos do equador interceptos pelos meridianos ſerão deſiguaes; o primeiro menor, e o ſegundo maior que o arco dado.

296. Imaginemos agora dois ſois S'' e S''', partindo ao meſmo tempo do equinocio, e deſcrevendo com movimento igual e uniforme; o primeiro S'' a ecliptica, o ſegundo S''' o equador (fig. 30) e ſupponhamos que ſe referem ſeus movimentos a eſte ultimo plano. S''' primeiro ſe adiantará ao meridiano de S''; mas depois eſte ſe lhe approximará e chegaráõ juntos ao ſolſticio. Então o meridiano de S'' ſe adiantará ao de S''', até o ſegundo equinocio, ao qual chegaráõ ao meſmo tempo. Repetir-ſe-hão as meſmas circunſtancias na outra metade da orbita, e as poſições dos dois aſtros, referidas ao equador, coincidiráõ quatro vezes no anno nos dois equinocios e nos dois ſolſticios.

297. Na natureza, o Sol medio não parte do equinocio ao meſmo tempo que o Sol verdadeiro; por tanto não ſe devem encontrar nos meſmos pontos. A deſigualdade do movimento proprio do Sol na ecliptica, altéra tambem eſta differença, mas eſtas

caufas unidas, fazem apenas mudar as epocas dos encontros dos Soes, o numero delles he fempre o mefmo.

298. Com effeito, admittindo a pofição actual da orbita folar, confideremos de novo os dois Soes S'',S''', partindo juntos do equinocio do outono, e caminhando para o perigeo. O verdadeiro Sol S', que defcreve a ecliptica, referido por feu meridiano ao plano do equador, fica então atraz delles, porque he precedido por S'' até o perigeo. Vejamos agora a ordem, em que fe executa a marcha deftes aftros. Até o folfticio, S''' precede a S'', e S'' a S': por tanto a fua ordem he S', S'', S'''. No folfticio, S'' alcança a S''', depois o paffa, o que faz a difpofição S', S''', S''; mas no perigeo S' apanha S'', e depois o precede. Para ifto S' e S''' não fe devem encontrar nefte intervallo. A marcha dos tres aftros vem então a fer S''', S'', S'. Affim entre o folfticio de inverno e o perigeo, o verdadeiro Sol S' referido ao equador, encontra o Sol medio S''', e a equação do tempo he nulla.

Do perigeo até o equinocio da primavera, S' fe adianta a S''; e S'' a S'''; por tanto não ha encontro nefte intervallo. No equinocio, S''' alcança a S'', e depois fe lhe adianta; e a ordem dos tres aftros, fica fendo S'', S''', S'; mas S''' não póde eftar muito tempo comprehendido entre os dois aftros; porque em cada quarto de circulo, o apartamento de S''' e de S'' chega a 2°27'37'', como fe vê pelo calculo (*a*); o de S' e de S'' ao contrario, não paffa de 1°55'27''; he actualmente a maior equação do centro; e como ella tem lugar perto dos equinocios, na pofição actual da orbita folar, o arco que lhe correfponde, no equador, he ainda menor que ella. Logo he claro que depois do equinocio da pri-

---

(*a*) Veja-fe a Nota V.

mavera, e antes do folfticio de verão, deve haver hum inftante, em que o Sol medio S'' toque o meridiano de S', então a equação do tempo he nulla fegunda vez.

Dalli para o folfticio de verão, o caminho dos tres Soes fe faz na ordem S'', S', S'''. No folfticio S'' alcança S''', e depois o paffa. Entretanto S' precede S'' até o apogeo, por confequencia o meridiano de S' encontra outra vez, antes do folfticio, o Sol medio S'' e a equação he nulla terceira vez.

Do folfticio ao apogeo, o caminho dos tres aftros fe faz na ordem S''', S'', S'; no apogeo S'' alcança a S', depois o paffa até o perigeo, o que dá a difpofição S''', S', S''. Ora, no equinocio do outono, S''' alcança a S''; por confequencia encontra no intervallo o meridiano de S', e a equação do tempo he nulla quarta vez.

Então a ordem dos tres Soes torna a fer S',S''S''', e fe reproduzem as mefmas apparencias na mefma ordem, em cada revolução.

299. Efta fimples expofição moftra, que em virtude da obliquidade da ecliptica, combinada com o movimento defigual do Sol, a equação do tempo he nulla quatro vezes no anno: a faber: huma vez entre o folfticio de inverno e o perigeo, duas vezes entre o equinocio da primavera e o folfticio de verão, e a ultima entre o apogeo e o equinocio do outono. Tambem fe moftra que as epocas deftes phenomenos varião com a pofição do eixo maior da orbita folar. Nefte momento fe achão aos 24 de Dezembro, 15 de Abril, 15 de Junho, e 31 de Agofto.

300. Se a inclinação da orbita fobre o plano do equador foffe nulla, de forte que eftes dois planos coincidiffem fempre, a parte da equação do tempo, que depende defta inclinação, feria tambem nulla. Então o movimento medio e o movimento verdadeiro fó differirião pela equação do centro. O Sol verdadeiro e o Sol medio ajuntar-fe-hião fómente no perigeo e no apogeo, e o tempo verdadeiro fó coin-

cidiria com o tempo medio duas vezes no anno, quando o Sol estivesse nos apsides.

301. Pelo que havemos dito se conhece facilmente que o instante do meio dia verdadeiro, marcado em huma meridiana pela sombra de hum ponteiro, differe, em geral, do meio dia medio. Mas como se conhece cada dia a equação do tempo, póde-se marcar para cada dia, de huma e outra parte da meridiana a direcção e o limite da sombra, no instante do meio dia medio. Consegue-se deste modo huma serie de pontos, que marcão em torno da meridiana verdadeira, as meridianas successivas do Sol medio. A curva que ajunta os seus extremos deve evidentemente encontrar a meridiana verdadeira, em quatro pontos, correspondentes aos quatro instantes do anno, em que a equação do tempo he nulla. Deve tambem ser fechada e reintrante, porque a equação do tempo toma os mesmos valores depois de cada revolução; assim esta curva tem pouco mais ou menos a figura do algarismo 8. Mas não he symmetrica, porque as epocas, em que a equação do tempo he nulla, são desigualmente distantes. Chama-se *meridiana do tempo medio*; e quando se descreve; em torno da verdadeira meridiana, nos relogios do Sol, marcão-se no seu contorno, sinaes correspondentes ás diversas estações, para se conhecer facilmente a porção da curva, que convém a cada parte do anno.

CAPITULO XII.

Modo de referir a posição dos astros ao plano da ecliptica.

302. ATé agora havemos determinado a posição dos diversos pontos do Ceo, referindo-os a dois planos, o horizonte, e o meridiano, fixos para cada lugar da superficie terrestre. A necessidade de comparar facilmente as observações feitas em differentes

lugares, nos tem feito procurar outros planos independentes da figura da terra. Havendo conhecido o lugar do equador celeſte e a maneira de avaliar os angulos dos meridianos pela medida do tempo, nos ſervimos deſtes dados para determinar a poſição dos aſtros, por meio da ſua aſcensão recta e da ſua declinação obſervadas.

303. Finalmente, como grande parte dos phenomenos celeſtes, relativos ao noſſo ſyſtema planetario, acontecem no plano da ecliptica, ou em planos que lhe são pouco inclinados; referi-los-hemos a eſſe plano da meſma maneira.

304. Para iſto, ſe imagina para cada ponto do Ceo hum circulo maximo perpendicular ao plano da ecliptica; que ſe chama *circulo de latitude*. Então a poſição de hum aſtro ſe determina por dois elementos.

O primeiro he o arco de circulo maximo comprehendido entre a ecliptica e o aſtro. Eſte arco he a *latitude*.

O ſegundo he o arco da ecliptica comprehendido entre o equinocio da primavera e o circulo de latitude. Eſte arco ſe conta no ſentido do movimento proprio do Sol, e ſe chama *longitude do aſtro*, por analogia á longitude do Sol.

305. Na fig. 31 EQ*e* repreſenta o equador celeſte EL*e* a ecliptica, E*e* a linha dos equinocios, SA a declinação de hum aſtro, AE ſua aſcensão recta; SL a latitude, EL a longitude.

306. Não ſe póde obter immediatamente por obſervação a latitude e a longitude dos aſtros; mas deduzem-ſe da declinação e da aſcensão recta, por meio dos triangulos SAE, SEL.

307. No triangulo SAE, rectangulo em A, ſe conhece a declinação SA, e a aſcensão recta AE. Por tanto póde-ſe calcular o lado SE pela fórmula

$$\cos SE = \frac{\cos SA . \cos AE.}{R}.$$

cos SA : cos AE :: cos S.E. Trig LXIV

Do meſmo modo ſe conhecerá o angulo obliquo SEA, pela fórmula

$$\text{tang}SEA = \frac{R\,\text{tang}SA}{\text{ſen}AE}.$$

Com eſtes dados ſe achará o angulo SEL; porqne

$$SEL = AEL - SEA;\ AEL = 180^\circ - \text{obliq. da eclipt.}$$

por conſequencia

$$SEL = 180^\circ - SEA - \text{obliq. da eclipt.}$$

Então no triangulo SEL, rectangulo em L, ſe conhecerá hum angulo obliquo SEL, e a hypotenuſa SE. Os outros dois lados ſerão dados pelas fórmulas

$$\text{ſen}SL = \frac{\text{ſen}SE.\text{ſen}SEL}{R}\,;\quad \text{tang}.EL = \frac{\text{tang}SE.\cos SEL}{R}.$$

Como o meſmo ſeno correſponde a muitos angulos, eſcolheremos os arcos SL, EL, ſegnndo a poſição boreal ou auſtral da eſtrella.

CAPITULO XIII.

Do veſtigio da ecliptica ſobre o ſuperficie da terra.

308. NÃo he poſſivel fixar o veſtigio do plano da ecliptica ſobre a ſuperficie terreſtre, aſſim como já marcámos o do equador. Eſte he perpendicular ao eixo de rotação da esfera celeſte; girando com ella, não muda de poſição relativamente á terra, que corta ſempre nos meſmos pontos. A ecliptica ao contrario he obliqua ao eixo do equador; he fixa no Ceo, porém movel relativamente á terra: girando com a esfera celeſte, corta neceſſariamente a terra em differentes pontos, e o veſtigio, que alli fórma, he perpetuamente variavel.

309. Podemos todavia fixar o limite deste vestigio, e determinar a parte da terra, em que elle fica sempre comprehendido durante a rotação, Limita-se ao Meio dia e ao Norte por dois parallelos terrestres correspondentes aos tropicos de capricornio e de cancer. Se imaginarmos huma linha recta, tirada do centro da terra a dois pontos oppostos dos tropicos celestes, e fizermos girar a terra sobre o seu eixo, esta recta fixa traçará sobre a superficie terrestre dois parallelos, que conservão os nomes correspondentes no Ceo. Todos os lugares nelles situados, tem hum dos pontos dos tropicos celestes no seu zenit, e a sua latitude he igual á obliquidade da ecliptica, ou 23°28′ desprezando segundos.

310. O *tropico de cancer* atravessa a parte septentrional da Africa, além do monte Atlante; passa por Syena na Ethiopia, atravessa o mar Vermelho, passa por Meca, entra na India abaixo do Golfo Persico, e sahe pelas costas da China; dalli prolongando-se no mar do Sul, toca a America Septentrional abaixo de California. Sahe finalmente ao golfo do Mexico, e remata na Costa Occidental da Africa, perto das Canarias.

311. O *tropico de Capricornio* corta a ponta austral da Africa e da ilha de S. Lourenço. Atravessa todo o mar da India até a Nova Hollanda. Deixada esta terra, estende-se sobre o mar do Sul, em toda a sua largura, atravessa a extremidade da America Septentrional no Paraguay, e torna á Africa, passando pelo Oceano. A maior parte deste tropico passa sobre os mares, e por consequencia a parte austral do globo contém muito menos terras descobertas do que a parte Septentrional.

312. Tambem he util na geographia physica distinguir sobre a superficie da terra dois pequenos circulos analogos aos circulos polares celestes. Se fizermos girar a terra sobre si mesma, no sentido do movimento diurno, o eixo da ecliptica ficando fixo, este eixo traçará na sua superficie os parallelos, de que

tratamos. Os lugares nelles ſituados tem no ſeu zenit hum dos pontos dos circulos polares; logo a ſua latitude he igual á declinação deſtes circulos ou a 66°32′; que he o complemento da obliquidade da ecliptica no equador.

313. O *circulo polar boreal*, ou *arctico*, atraveſſa a Irlanda no Oceano Septentrional; eſtende-ſe naquelle Oceano para Eſt, entra na Norwega, paſſa a extremidade Septentrional do golfo de Bothnia; dalli atraveſſa a Ruſſia Aſiatica, o Eſtreito do Norte; e depois de haver paſſado por incognitas regiões da America Septentrional, ſahido o Eſtreito de Davis, atraveſſado huma parte da Groenlandia, entra outra vez na Irlanda.

314. O *circulo polar auſtral* ou *antarctico*, he defendido por todas as partes por gelos perpetuos, e até o preſente, ninguem lhe pôde chegar.

315. Em geral, o hemisferio auſtral parece mais frio que o hemisferio boreal. A cinta de gelo, que cerca o pólo arctico, não paſſa de 9° de diſtancia em latitude; a do pólo antarctico, ſe eſtende além de 18°; e os immenſos glações, que ſe deſtacão, viajão até 58° e até 49°, que he pouco mais ou menos a latitude de Paris e outras Cidades da França. A meſma proporção ſe conſerva de ambas as partes nas terras, que as agoas tem abandonado, e regiões, como a Terra de Fogo, ſituadas no hemisferio auſtral, na meſma latitude que a França, eſtão cobertas de gelos eternos.

CAPITULO XIV.

Da preceſsão dos equinocios, conſiderada como effeitos do movimento da esfera celeſte.

316. OBſervando o Ceo muitos annos, ſe notou que o equador não paſſa ſempre pelas meſmas eſtrellas. As que alli ſe achão hoje, eſtavão algum

dia muito diſtantes; e as que então alli eſtavão, eſtão hoje muito longe. As eſtrellas, mudando de lugar não mudárão de latitude ſenſivelmente, e por conſequencia as ſuas diſtancias ao plano da ecliptica ficárão as meſmas; de ſorte que os phenomenos ſe paſsão como ſe a esfera celeſte giraſſe em torno do eixo da ecliptica, com hum movimento muito lento, do Occidente para o Oriente, no meſmo ſentido que o do Sol.

317. Para medir eſte movimento, baſta comparar entre ſi as longitudes de huma meſma eſtrella, obſervadas em duas epocas differentes; como o effeito he o meſmo em todas as eſtrellas, importa pouco qual delas ſe eſcolhe.

318. Por exemplo, ſegundo as obſervações de *Bradley*, *a eſpiga da Virgem*, tinha de longitude, no principio de 1760, 200°29′40″.

Conforme as obſervações de *Maskeline*, no principio de 1802, e meſma eſtrella tinha de longitude, 201°4′41″.

A differença he 35′1″ em 42 annos, o que dá 50″ por anno. Combinando grande numero de obſervações temos 50″ $\frac{1}{4}$. Vê-ſe com effeito que hum elemento tão delicado não ſe póde eſtabelecr com certeza ſenão por hum meio entre grande numero de reſultados obſervados.

319. Em conſequencia deſte movimento, os pontos equinociaes não correſpondem ſempre aos meſmos pontos da esfera celeſte; e o Sol emprega hum pouco menos tempo para voltar ao equador do que ás meſmas eſtrellas. Niſto conſiſte a *preceſsão dos equinocios*.

320. Para calcular eſte atrazamento, convém notar que, quando o Sol medio tem chegado ao equinocio, depois de huma revolução tropica de 365, 242250 dias, ainda tem que deſcrever na ecliptica o pequeno arco 50″$\frac{1}{4}$, antes de tocar o ponto da esfera das eſtrellas, que o anno precedente havia paſſado pelo equinocio ao meſmo tempo que elle. Com effeito,

eſte ponto tambem eſtá em movimento ſobre a ecliptica em virtude da preceſsão, e ſe affaſta hum pouco do Sol, em quanto eſte aſtro o alcança; mas ſendo o ſeu caminho annual $50'' \frac{1}{4}$, a quantidade que elle ſe adianta deſde o equinocio até o momento em que encontra o Sol, he inteiramente inſenſivel. Aſſim para conhecer eſte atrazamento annual do Sol ácerca das eſtrellas, baſta reduzir a tempo o pequeno arco $50'' \frac{1}{4}$, a razão da circumferencia inteira por cada anno tropico, o reſultado he $\frac{50'' \frac{1}{4}}{360^\circ} \times 365{,}242250$ dias, ou $20'19'',9$. Ajuntando-o ao anno tropico (365 dias 5 horas $48'50'',4$), teremos a direcção de huma revolução inteira do Sol, relativamente ás eſtrellas, que ſe chama anno ſyderal, igual a 365 dias 6 horas $9'10''$.

321. Eſtes reſultados moſtrão claramente que a linha dos equinocios retrográda ſobre a ecliptica hum grão em 71,6 annos.

322. He igualmente facil concluir o tempo que os equinocios hão de empregar em correr toda a ecliptica, e fazer o giro do Ceo eſtrellado; porque ſe he neceſſario hum anno para $50'' \frac{1}{4}$, o tempo neceſſario para deſcrever 360° ſerá $\frac{360^\circ}{50'' \frac{1}{4}} \times 1$ anno, ou 25867 annos, iſto he, perto de 26000 annos.

CAPITULO XV.

Da preceſsão dos equinocios conſiderada como effeito do deslocamento do equador terreſtre, e da nutação do eixo da terra.

323. QUando ſe conſidera o movimento do Sol como apparente, e o da terra como real, os ſignos da ecliptica correſpondem aos differentes pontos da orbita terreſtre. Veja-ſe a fig. 32.

324. Então a terra vê fempre o Sol no lugar da ecliptica oppofto a aquelle em que ella fe acha. Quando ella eftá no figno de aries, vê o Sol no de libra. Quando eftá em tauro, vê-o no Scorpião, e affim em diante. Em quanto ella fe move na ordem dos fignos, o Sol parece mover-fe ás aveffas da orbita e no mefmo fentido.

325. Agora vou moftrar como a precefsão dos equinocios fe póde explicar nefta hypothefe, fem pôr em movimento toda a esfera celefte.

Seja TT′*tt*′ (fig. 33) a orbita annual da terra, da qual o Sol occupa hum dos focos: feja ETQ o plano do equador; TP o eixo do pólo que lhe he perpendicular, o equinocio acontecerá quando a linha TQ, interfecção do equador e da ecliptica, paffar pelo centro do Sol; porque então efte aftro fe achará no plano ETQ do equador.

326. Ha duas pofições oppoftas, T e *t*, na orbita, cada huma das quaes dará hum equinocio.

327. Se o veftigio TQ foffe conftantemente parallelo a fi mefmo, o equinocio aconteceria fempre nos mefmos pontos. Mas em quanto a terra fe move no fentido TO*t*′, efte mefmo veftigio tem hum pequeno movimento, e quando a terra chega a T′, não eftá já na direcção T S′ parallela a TS, mas na direcção TQ′, que faz com T′S′ hum pequeno angulo S′T′Q′, igual a $50''\frac{1}{4}$. Então o veftigio T′Q′ encontra o Sol antes que a terra volte a T; o equinocio he mais cedo do que feria fem efta circunftancia; nifto confifte a *precefsão dos equinocios*.

328. O veftigio T′Q′ prolongado parece correfponder a *t*′ na ecliptica. Por tanto parece atrazar-fe cada anno a quantidade *tt*′, contra a ordem dos fignos, ifto he, em fentido contrario de movimento annuo da terra. Por efta razão fe diz que o movimento dos equinocios he *retrogrado*.

329. Para pintar geometricamente as leis deftes movimentos, imaginemos pelo centro T da terra hum eixo TP′ perpendicular ao plano da ecliptica,

Seja $Pp'p''$ o circulo da esfera celeste parallelo á ecliptica, e no qual se acha o pólo do equador P; ponha-se este pólo em movimento sobre o parallelo, no sentido $Pp'p''$, fazendo-o descrever cada anno $50'\frac{1}{4}$, ou todo o parallelo em 25867 annos. O eixo TP descreverá em torno de TP, huma superficie conica; levará comsigo o equador terrestre, ao qual he perpendicular, e fará retrogradar o seu vestigio TQ sobre a ecliptica, o que produzirá a precessão dos equinocios.

330. Este movimento não he constantemente uniforme, e o pólo P nem sempre está neste parallelo. Sóbe e desce alternativamente. Imagine-se o circulo de latitude P'P, que passa pelos pólos da ecliptica e do equador. Descreva-se huma pequena ellipse $\pi\pi'\pi''$, cujo eixo maior seja tangente ao circulo de latitude, e subtenda na esfera celeste, hum angulo de $20''$ sendo o eixo menor de $25'$; o centro desta ellipse se move uniformemente no parallelo $Pp'p''$; o pólo P do equador oscilla sobre a sua circumferencia, e a descreve em 19 annos. Estas oscillações abaixão, e elevão alternativamente o plano do equador. Deste modo fazem variar a direcção do seu vestigio TQ sobre a ecliptica. O deslocamento uniforme deste eixo he huma vez accelerado, outras retardado por este movimento secundario, e variavel. Daqui vem as desigualdades periodicas observadas na precessão dos equinocios, e na obliquidade da ecliptica. Ellas são produzidas por este balanço do eixo terrestre, e por isto o effeito, que ellas produzem, se chama *nutação*.

CAPITULO XVI.

Descobertas de Kepler.

331. AInda que já ficão expostas (nos numeros 213 e 217) algumas das celebres descobertas de *Kepler*, destinamos este Capitulo á sua particular exposição.

16

332. A primeira he que as figuras das orbitas dos planetas são ellipses que tem o Sol em hum dos focos, o que elle determinou da maneira seguinte.

Seja S o Sol (fig.34), M, Marte, D, E, dois lugares da terra, quando Marte está no mesmo ponto M da sua orbita. Quando a terra estava em D, observou elle a differença das longitudes do Sol e de Marte, ou o angulo MDS; observou da mesma maneira em E o angulo MES. Ora, sendo conhecidos os lugares D, E da terra na sua orbita, ficão tambem conhecidas as distancias DS, ES, e o angulo DSE; por tanto no triangulo DSE, conhecemos DS, SE, e o angulo DSE, e acharemos DE, e os angulos SDE, SED; depois, conhecemos os angulos MDE, MED, e DE, e achamos MD, e finalmente no triangulo MDS, conhecemos MD, DS, e o angulo MDS, para acharmos MS, distancia de Marte ao Sol. Elle achou tambem o angulo MSD, differença da longitude heliocentrica de Marte e da terra.

333. Por este methodo, *Kepler*, por observações feitas ácerca de Marte, na sua aphelia, e perihelia (porque elle determinou a posição da linha dos apsides, por hum methodo independente da figura da orbita) determinou que a primeira distancia do Sol era 166780, e a segunda 138500, sendo a distancia media da terra ao Sol 100000; por tanto a distancia media de Marte era 152640, e a excentricidade da sua orbita 14140. Então determinou por modo similhante, outras tres distancias, e achou-as 147750, 163100, 166255. Calculou as mesmas tres distancias na supposição de ser a terra hum circulo, e achou-os 148539, 163883,166605; por tanto os erros da hypothese circular erão 789,783,350. Elle fazia tão bom conceito das observações de *Tycho* (nas quaes fundava todos os seus calculos) que não podia suppôr que estas differenças viessem da sua inexactidão; e como a distancia entre a aphelia e a perihelia era muito grande na hypothese de que a orbita era hum circulo, elle

moſtrou que a fórma da orbita devia ſer hum oval: *Itaque plane hoc eſt: orbita planetæ non eſt circulus, ſed ingrediens ad latera utraque paulatim, iterumque ad circuli amplitudinem in perigæo exiens, cujuſmodi figuram itineris ovalem appellitant* (*a*). E como de todas as ovaes a ellipſe he a mais ſimples, ſuppoz primeiro que a orbita era huma ellipſe, e poz o Sol em hum dos focos; e calculando as diſtancias acima notadas, achou que todas concordavão. Fez o meſmo para os outros pontos da orbita, e achou que concordavão todos; e decidio que a orbita de Marte era huma ellipſe que tinha o Sol em hum dos ſeus focos. Conjecturou que o meſmo ſeria verdade nos outros planetas, e achou por experiencia que aſſim era. Donde concluio que *os ſeis planetas primarios girão em torno do Sol em ellipſes, que tem o Sol em hum dos focos.*

334. As diſtancias medias relativas dos planetas ao Sol são as ſeguintes

Mercurio . . .	38710
Venus	72333
Terra	100000
Marte	152369
Jupiter	520279
Saturno . . .	954072
Herſchell . . .	1918352.

Deſcobertas as diſtancias medias relativas dos planetas ao Sol, e conhecendo os ſeus tempos periodicos, applicou-ſe a indagar ſe haveria alguma relação entre elles. A 8 de Março de 1618 começou a comparar as potencias deſtas quantidades, e tomou os quadrados dos tempos periodicos, e comparou-os com os cubos das diſtancias medias, mas por algum erro de calcu-

(*a*) Kepler, *de motibus ſtellæ martis*, pag. 213.

lo não concordavão. Porém a 15 de Maio, havendo repetido os calculos, defcobrio o erro, e achou que concordavão exactamente. Affim defcobrio efta famofa lei: *que os quadrados dos tempos periodicos de todos os planetas eftão como os cubos das fuas diftancias medias ao Sol. Newton* provou depois que ifto era huma confequencia neceffaria do movimento de hum corpo em huma ellipfe, revolvendo-fe em torno do fóco (*a*). *Kepler* defcobrio tambem por obfervação que as velocidades dos planetas, nos feus apfides, eftão na razão inverfa das fuas diftancias ao Sol; donde fe fegue que naquelles pontos defcrevem em torno do Sol áreas iguaes em tempos iguaes. E, ainda que elle não podia provar pela obfervação a verdade defta afferção, em todos os pontos da orbita, elle não duvidou da fua exiftencia. Por tanto applicou efte principio á indagação da orbita, e achando que os feus calculos concordavão com a obfervação, concluio que em geral era certo: *que os planetas defcrevem em torno do Sol áreas iguaes em tempos iguaes*. Efta defcoberta foi talvez o fundamento do Livro dos Principios; porque provavelmente elle fuggerio a *Newton* a idéa de que aquella propofição era verdadeira em geral, como elle depois provou.

Eftas importantes defcobertas são o fundamento de toda a aftronomia.

(*a*) Princip. Philof. L. I. Sec. 2. Pr. 15.

APPENDICE
AO
LIVRO II.

Das practicas mais necessarias.

CAPITULO I.

Dos instrumentos de Reflexão.

335. A Construcção dos instrumentos de reflexão se funda em hum principio de Optica bem conhecido, a saber, que se hum espelho girar sobre o seu eixo, o movimento angular das imagens será duplo do movimento do espelho. (Opt. 159). Por tanto, se hum raio de luz HE (fig. 35) encontrar o espelho AEB, reflectirá de E para *e*, e se o espelho girar huma quantidade angular DEB, o angulo HES, formado pelo primeiro raio de luz HE, e outro que no segundo caso reflicta na mesma direcção E*e*, será igual a 2EDB.

336. Deste modo, recebendo-o em outro espelho fixo F*e*Q, o raio reflexo E*e* experimentará segunda reflexão, e tomará a direcção *e*O. Assim, supponde fixo o espelho F*e*Q, e hum olho constantemente em algum ponto de *e*O, certamente este hirá vendo successivamente as segundas imagens de todos os obje-

ctos H, S, &c., e a rotação do efpelho AB ferá exactamente igual á metade dos angulos HES, formados em E pelos raios de luz dos objectos H, S, &c.

337. Daqui provém hum methodo facil de medir as diftancias angulares dos objectos: no que confifte todo o artificio dos inftrumentos de reflexão. Se fizermos concorrer a imagem directa do objecto H vifta de O com a fua imagem reflexa no efpelho FeO, baftará medir o movimento angular, que he neceffario dar ao efpelho AB para que a fegunda imagem de outro objecto como S, commum com o primeiro, e o feu dobro ferá exactamente igual ao angulo que fe bufca SEH. No oitante fe poupa efta reducção, fixando o efpelho AB em huma alidade, cujo movimento angular, igual ao do efpelho, fe acha indicado em hum arco de circulo KL, de que he raio, dividido em meios gráos, meios minutos, &c., que valem gráos, minutos.

338. Quando o objecto H eftá diftante, o angulo EH*e* he fenfivelmente nullo; e o raio HE póde confiderar-fe como parallelo á vifual H*e*O. Nefte cafo, o angulo HE*e* he igual a E*e*O, e por confeguinte *e*EB=F*e*E. De que fe fegue que fendo os efpelhos parallelos ao fazer coincidir a imagem com o objecto, a fua inclinação he depois igual á metade do angulo obfervado.

339. Ao oitante coftuma ajuntar-fe hum terceiro efpelho *e'*, que ferve para as *obfervações* chamadas de *revez*. No cafo defte efpelho, a fegunda imagem do objecto H', directamente oppofta a H, fe faz concorrer com elle, a faber, difpõe-fe o efpelho AB de maneira que o raio H'E reflexo em E, e depois em *e'*, coincida com a vifual O*e'*H; e girando o efpelho AEB com a alidade, as divisões do arco dão o valor do angulo H'ES que he o Supplemento do determinado pelos dois objectos SEH.

340. Eftas obfervações differem tambem das obfervações directas em que a fegunda imagem no efpe-

pelho e' moſtra o ſeu objecto ás aveſſas como he evidente, conſiderando as poſições dos eſpelhos e caminho dos raios; e eſta attenção he preciſa ſempre que ſe tomem diſtancias angulares entre objectos, que tem diametro ſenſivel.

Suppondo o objecto H longe como acima, as linhas H'H, OH, ſerão ſenſivelmente parallelas, o angulo e'EH igual a 180°—Ee'H, e por conſequencia $\frac{1}{2}\, e'EH = e'EB = \frac{180^\circ - Ee'H}{2} = 90^\circ - Ee'M$. Do que ſe ſegue que, fazendo concorrer a imagem do objecto H' oppoſto a H com o meſmo H, os eſpelhos ſerão perpendiculares, e que nas obſervações o complemento de ſua inclinação he igual á metade do angulo medido.

341. Neſte caſo eſtão os objectos celeſtes, e poſto que a eſtes ſe dirigem os inſtrumentos, ſempre ſupporemos os eſpelhos neſta poſição.

342. Chamamos as linhas Oe, Oe' directas ao ponto H, *eixos de visão.*

343. Nas obſervações directas, os planos dos eſpelhos AEB, FeQ são perpendiculares ao de HEe, ou EeO, como nas de revez os eſpelhos AEB, MeN o são ao plano Ee'H, ou Ee'O; e em ambos os uſos para que o movimento angular de alidade mida exactamente o do eſpelho, ſe vê que o circulo que deſcreve o ſeu extremo, ou o limbo graduado em que o indique, deve eſtar no meſmo, ou no outro plano parallelo a EeO ou Ee'O. Por tanto ha miſter que todo o corpo do inſtrumento EKL ſeja muito ſólido; que huma vez bem diſpoſto, não varie com os movimentos ds alidade, e a todo o tempo ſe poſsão deſcobrir os erros, que produzir.

Deſcripção do corpo do inſtrumento.

344. O oitante compõe-ſe de dois raios, hum limbo e duas cintas, que ſervem de fortificar o inſtru-

mento, e livra-lo de empenar. O arco, ou limbo, ainda que he só a oitava parte de hum circnlo, está dividida em 90° pelo que fica dito. Estes gráos se contão da direita para a esquerda, e de ordinario cada hum se divide em tres partes iguaes. Por tanto hum destes intervallos contém 20 minutos, e por meio de huma escala, que está no fim da alidade dividida em 20 partes iguaes, se póde ler facilmente huma observação até minutos. A graduação do limbo continúa alguns gráos para a direita de 0; esta porção se chama *arco de excesso*, e serve para alguns fins.

Da alidade.

345. A alidade he huma regoa, ordinariamente de latão, movel em torno do centro do instrumento, e e mais larga para a parte do eixo de movimento; no outro extremo da alidade gira huma peça de latão por detraz do limbo, que tem huma mola para ajustar a escala de divisão ao limbo, e huma rosca para aperta-la em qualquer posição. Alguns instrumentos tem huma rosca fixa na parte inferior da alidade, que faz mover docemente a alidade ao longo do limbo, sem os saltos, a que está sujeita, quando se move com a mão, e que podem dar á observação a incertezs de 2 ou 3 minutos.

345. A parte da alidade, que se move ao longo do limbo, tem huma pequena escala preza a hum lado da abertura rectangular, chamada escala de divisão, e mais ordinariamente *Vernier* ou *Nonius*, dos nomes dos suppostos inventores (*a*).

(*a*) *Clavio* foi o primeiro qne explicou o methodo de dividir, no Lemma I. do seu Tratado sobre os astrolabios, impresso em Mayença em 1611; *Pedro Vernier*, que o deu por seu, o publicou em hum pequeno tratado intitulado, construcção, uso e pro-

Commummente contém hum efpaço igual a 21 ou 19 divisões do limbo, e fe divide em 20 partes; por tanto a differença entre huma divisão do limbo e huma divisão da efcala divifória he hum vinte-avo da divisão do limbo ou hum minuto; e por tanto fe huma divisão da efcala divifória eftiver na mefma linha recta com huma divisão do limbo, nenhuma outra divisão na efcala divifória póde coincidir com huma divisão do limbo, exceptuando as divisões extremas.

347. Daqui fe fegue que para fe achar os gráos e minutos de hum angulo obfervado, veja-fe que minuto na efcala divifória coincide com huma divisão do limbo; e ajuntando eftes minutos aos gráos e partes de gráos do limbo, que precedem immediatamente

---

priedades do Novo Quadrante Mathematico, &c. impreffo em Bruxellas em 1631.

Dividão-fe duas linhas, ou arcos de circulo iguaes, de maneira, que o numero de divisões em hum exceda em huma ao numero de divisões da outra; ifto he, que fe huma for dividida em n partes, a outra feja em $n+1$, e chame-fe unidade huma parte da primeira.

Então $n : 1 :: n+1 : \frac{n+1}{n} =$ parte da outra.

E $\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n} =$ differença das partes.

Se huma for dividida em n partes, e outra em $n-1$, ferá $n : 1 :: n-1 : \frac{n-1}{n} =$ parte da outra

E $1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} =$ differença das partes.

a primeira divisão na escala divisoria, será os gráos e minutos pedidos.

Do espelho central.

348. O espelho central he hum pedaço rectangular de vidro plano, que tem huma das faces inteiramente estanhada. O fim deste espelho he reflectir a imagem do objecto observado no espelho horizontal, e deste no olho do observador.

349. Este espelho está posto em huma caixa de latão perpendicularmente ao plano do instrumento, immediatamente sobre o centro de movimento da alidade, por meio dos dois parafusos em huma pequena

---

Como nos instrumentos ordinarios, o vernier está dividido em 20 partes iguaes, e o limbo contém 19 ou 21, sendo igual o comprimento absoluto de ambos, he evidente que cada divisão da escala corresponderá a 1 minuto, porque no caso presente n representa 20, e $\frac{1}{n} = \frac{1}{20}$ de huma divisão do limbo, que he de 20 minutos.

Se hum gráo do limbo estiver dividido em 4 partes iguaes, e a escala divisoria contiver hum espaço igual a $7^o\frac{1}{4}$ ou 29 daquellas partes, porém divididas em 30 partes iguaes, a escala mostrará meios minutos, porque $\frac{1}{30}$ de $\frac{60}{4} = 30''$. E finalmente, se hum gráo se dividir em 6 partes iguaes, e a escala contiver 59 ou 61 destas partes, mas dividida em 60 partes iguaes, cada divisão que a escala mostrar, valerá $10''$; porque $\frac{1}{60}$ de $\frac{60}{6} = \frac{1}{6}$ de hum minuto $= 10''$.

chapa de latão unida á parte inferior da caixa, e que ſahe em angulos rectos das coſtas da caixa, hum deſtes parafuſos ajunta e o outro aperta contra a alidade.

Dollond e *Maskeline* tem aperfeiçoado eſta conſtrucção. Mas não nos demoraremos com os ſeus trabalhos.

Do eſpelho horizontal.

350. Ha dois eſpelhos horizontaes, hum para as obſervações directas, outro para as de revez. Cada hum eſtá em huma caixa de latão, que tem hum eixo, que paſſa pelos raios do inſtrumento, fornecido de hum maquiniſmo, por meio do qual elle póde receber hum pequeno movimento, até ſe pôr em huma poſição propria reſpectivamente ao eſpelho central; no pé de cada eſpelho ha dois parafuſos, hum em cada lado do eſpelho, de maneira, que atarraxan-

---

Eſte methodo de divisão ſe attribuio injuſtamente a *Pedro Nunes*; porque o methodo deſte he muito differente do de *Vernier*, como ſe póde ver no ſeu Tratado „ *de crepuſculis*, impreſſo em Lisboa em 1522, e tambem no ſeu Tratado „ *de arte atque ratione navegandi*.

O methodo de Nunes conſiſte em deſcrever dentro do meſmo quadrante 45 arcos concentricos, dividindo o exterior em 90 partes iguaes o ſeguinte em 89, o outro em 88, e aſſim em diante, até o interior que tem ſó 46 partes iguaes; por eſte meio, na maior parte das obſervações o prumo ou alidade ha de atraveſſar algum daquelles circulos muito perto de hum ponto de divisão, pelo que ſe póde facilmente ſaber os gráos e minutos do arco intercepto.

A invenção das diagonaes publicadas em 1753 por *Thomaz Diggs* fez eſquecer o methodo de Nunes, e foi ſubſtituida pela divisão de *Vernier*.

do hum, e defatarraxando o outro, fe póde pôr o efpelho perpendicular ao plano do inftrumento. A parte inferior do efpelho horizontal direćto he eftanhado, e a fuperior tranfparente, por entre a qual fe póde ver direćtamente hum dos objećtos, vendo-fe o outro pela reflexão da parte eftanhada do efpelho. O efpelho horizontal inverfo he todo eftanhado, e no meio ha huma fenda tranfparente pela qual fe olha ao objećto direćto.

Dos vidros córados.

351. Ordinariamente ha tres vidros córados, dos quaes dois são encarnados, e o outro verde; eftes prefervão o olho do obfervador do effeito dos raios do Sol, e nas obfervações nоćturnas evitão o brilho da lua. Cada hum eftá em hum encache feparado, de maneira que no tempo da obfervacão póde empregar-fe ou hum ou mais. Os dois vidros vermelhos fervem para as obfervações do Sol: e por tanto para os fazer uteis em todas as occafiões, hum he mais efcuro do que o outro, de maneira que fe póde empregar qualquer delles, ou ambos, fegundo o efplendor do Sól, podem tambem confeguir-fe outros gráos de fombra, combinando o vidro verde com qualquer dos outros. Nas obfervações da lua, emprega-fe particularmente o vidro verde, que tambem póde fervir para obfervar a altura do Sol, quando efte objećto eftá muito efcuro.

Do Sextante.

352. O Sextante, como diz o nome, he a fexta parte de hum circulo, e por tanto contém 60°; mas pelo principio citado he dividido em 120°. He conftruido pelos mefmos principios que o oitante, e fe póde dizer que he aquelle inftrumento ampliado.

353. Efte inftrumento he ordinariamente de metal; a alidade e limbo são de latão, mas a fabrica he

de composição mais dura; a unica parte que tem de páo he hum cabo pegado ás costas, pelo qual se suspende com huma mão, quando se observão as distancias, e a outra governa o movimento da alidade.

354. Hum gráo do limbo deste instrumento se divide ordinariamente em tres partes iguaes; cada huma das quaes vem a conter 20′, e a alidade he dividida de maneira que mostre meios minutos: em alguns sextantes o gráo está dividido em 6 partes iguaes, das quaes cada huma contém 10; e o *Vernier* mostra 10″.

355. A parte da alidade proxima ao limbo tem hum parafuso de ajustar, ou como se chama algumas vezes *tangente*, que move a alidade brandamente e regularmente, e por tanto o contacto dos limbos de quaesquer dois objectos póde ser tão perfeito, quanto os olhos podem distinguir, com o soccorro do telescopio, que acompanha este instrumento.

356. O sextante tem os vidros córados como o oitante; tem mais dois óculos, hum dos quaes mostra os objectos na sua posição natural; e o outro mostra os objectos ás avessas; e tambem hum tubo sem vidros. Por meio deste, o raio visual se póde fazer parallelo ao plano do sextante, e se observa com mais exactidão o contacto dos limbos de quaesquer dois objectos. O tubo, ou qualquer dos óculos, se atarraxa em hum annel de latão, que está prezo em outro annel de latão, por meio de dois parafusos, de maneira que levanta ou abaixa o telescopio a fim de que do raio visual se dirija á parte conveniente do espelho horizontal.

Rectificações do Sextante.

357. As rectificaçóeo do sextante são, pôr os espelhos perpendiculares ao plano do instrumento, e parallelo hum ao outro, quando a alidade está em zero, e rectificar a posição do raio visual. He verdade que se póde achar a desviação de cada

hum deſtes á ſua verdadeira poſição, e calcular por iſſo o erro da obſervação; mas iſto ſó ſe deve admittir em caſos de abſoluta neceſſidade.

RECTIFICAÇAM I.

Pôr o eſpelho central perpendicular ao plano do inſtrumento.

358. Ponha-ſe a alidade em 60°, e ſuſtente-ſe o plano do ſextante proximamente parallelo ao horizonte, com o limbo para fóra: então dirija-ſe a viſta ao eſpelho, e ſe o limbo reflexo do inſtrumento apparecer exactamente no meſmo plano com o limbo viſto directamente, o eſpelho eſtará perpendicular ao plano do inſtrumento. Mas, ſe os limbos não eſtiverem no meſmo plano, volte-ſe o paraſuſo da lamina atraz do eſpelho, até que tomem eſſa poſição, e o eſpelho ficará rectificado.

RECTIFICAÇAM II.

Pôr o eſpelho horizontal perpendicular ao plano do Sextante.

359. Ponha-ſe o principio das diviſões da alidade em zero do limbo, e ſuſtente-ſe e plano do inſtrumento em huma poſição horizontal; então dirija-ſe a viſta ao eſpelho horizontal, e ſe o horizonte reflexo eſtiver apparentemente na meſma recta com o horizonte directo, o eſpelho he perpendicular ao plano do ſextante; aliás, volte-ſe o paraſuſo do eſpelho horizontal nas coſtas do inſtrumento até á perfeita coincidencia dos horizontes reflexo e directo.

RECTIFICAÇAM III.

Pôr o espelho horizontal parallelo ao central.

360. Ponha-se em zero a primeira divisão da alidade, fixe-se a alidade nesta posição, e faça-se a coincidencia destas divisões perfeita, por meio do parafuso no fim da alidade, usando de huma lente, que augmenta; atarraxe-se o óculo no seu pé, e volte-se o parafuso correspondente, até que o campo do óculo fique cortado em duas partes iguaes pela linha, que separa a parte estanhada da transparente no espelho horizontal; sustente-se o sextante verticalmente, dirija-se a vista ao horizonte, e se os horizontes reflexo e directo não coincidirem, desaperte-se hum dos dois parafusos, que ajustão a viróla, em que o óculo he atarrachado, e aperte-se o outro, até que fique a coincidencia dos horizontes seja perfeita. Apertado o parafuso, que conserva a viróla no seu lugar, será conveniente examinar a sua rectificação; e se a coincidencia dos horizontes não for perfeita, deve-se repetir a rectificação até que ella se consiga; mas como he difficil obter por este meio huma coincidencia exacta, podem-se fazer coincidir os horizontes voltando o parafuso da alidade, e a differença entre os dois zeros he o erro do instrumento.

361. Tambem se póde achar o erro, medindo o diametro do Sol ou da lua duas vezes com hum movimento da alidade em direcções contrarias. Se ambas as medidas forem tomadas ou para a direita ou para a esquerda de zero do limbo, metade da somma será o erro, ou additivo ou subtractivo; mas se huma das medidas for tomada para a direita, e outra para a esquerda de 0, metade da differença he o erro, que será additivo, quando o diametro medido para a direita de 0 for maior do que o medido para a esquerda, e subtractivo no caso contrario. Como em alguns sextantes não se póde rectificar o espelho ho-

rizontal; deve-se achar o seu erro por este methodo; e neste caso elle se deve considerar como huma quantidade constante, que se ha de applicar a todos os angulos medidos com o mesmo instrumento.

362. Nas alturas observadas em terra pelo methodo de reflexão, o instrumento dá as duas alturas affectas do erro da alidade; neste caso, achar-se-hia conveniente chamar metade do erro da alidade a correcção, que sendo applicada a metade do angulo dado pelo instrumento, dará a altura apparente do objecto.

RECTIFICAÇAM IV.

Fazer a linha de collimação (a) parallela ao plano do do sextante.

353. Faça-se girar o extremo ocular do óculo, que contém dois fios parallelos, até que os fios fiquem parallelos ao plano do instrumento, e escolhão-se dois objectos distantes, como duas estrellas da primeira grandeza, ou o Sol e a Lua, cuja distancia não seja menor de 90° ou 100°, faça-se o contacto dos limbos destes objectos tão perfeito quanto for possivel, no fio mais proximo ao plano do instrumento, fixe-se a alidade nesta posição: mova-se o sextante, até que os objectos estejão no outro fio, e se ficarem em contacto os mesmos limbos, está rectificado o eixo; mas se os limbos ficarem ou apparentemente separados, ou hum cobrir parte do outro, corrija-se metade do erro com os parafusos, que estão na parte circular do encache, hum dos quaes está em cima, e o outro entre o óculo, e o sextante, volte-se o parafuso, que está no extremo da

---

(a) Linha de collimação he huma recta imaginaria que une o centro de refracções do vidro objectivo de hum óculo, e ou a intersecção dos fios verticaes, ou o meio entre os parallelos.

alidade, até que os limbos fiquem em contacto; então levem-se os objectos ao fio proximo ao instrumento; e se os limbos ficarem em contacto, o eixo de visão do óculo será parallelo ao plano do instrumento, senão, repita-se o mesmo, que no outro fio, e continue-se até não haver erro.

364. Se a lua for hum dos objectos, deve-se fazer esta rectificação com toda a pressa; aliás he necessario attender ao movimento apparente da lua neste intervallo.

365. Póde tambem fazer-se esta rectificação da maneira seguinte: ponha-se o sextante no extremo de huma meza grande, cuja superficie seja perfeitamente plana; tome-se o rectificador (*a*), e levante-se o buraco circular á altura do meio do extremo ocular do óculo, e ponha-se no outro extremo da meza; dirija-se o óculo ao rectificador, fação-se os fios parallelos ao plano do instrumento, e ajuste-se o óculo a huma visão tão distante quanto for possivel. Se o buraco circular do rectificador estiver no meio dos fios, o eixo do óculo estará parallelo ao plano do instrumento; se não deve-se corrigir metade do erro, levantando, ou abaixando o bastidor, que contém o buraco circular, e a outra metade pelo parafuso, que está no encache do óculo. Para maior exactidão deve repetir-se esta rectificação, fazendo a parte circular do rectificador da mesma altura do extremo ocular do óculo, e procedendo como acima, até não haver erro.

366. Póde tambem fazer-se esta rectificação olhando directamente para o Sol pelo óculo; então se a sombra do raio mais remoto cobrir exactamente o raio mais proximo, ou meio da regoa vertical ao

(*a*) *Adjusting tool* em Inglez. *Mendoza*, que o descreve, não lhe dá nome; parece-me que o de rectificador lhe convém.

mesmo tempo que o Sol apparece no meio dos fios; o óculo está direito; aliás deve ajustar-se pelos fios da parte circular do pé.

Uso do Sextante.

367. O principal uso do Sextante he medir a distancia angular entre a Lua e o Sol, ou huma estrella fixa. Quando a distancia entre a Lua e outro daquelles objectos se deve observar, deve-se pegar no sextante de maneira, que o seu plano prolongado passe pelo olho do observador e pelos dois objectos; e levar a imagem reflexa do mais luminoso ao contacto com o outro visto directamente. Para conseguir isto, he evidente, que, quando o objecto mais brilhante está á direita do outro, se deve voltar para cima o rosto do sextante; e se estiver á esquerda, para baixo. Quando o rosto do sextante está para cima, deve sustentar-se o instrumento com a direita, e mover-se a alidade com a esquerda; mas quando o rosto do sextante está para baixo, deve segurar-se com a esquerda, e regular-se com a direita o movimento da alidade.

368. Algumas vezes convirá muito ao observador estar sentado, mórmente quando o objecto reflexo está á direita do directo; neste caso deve sustentar-se o instrumento com a direita, e o cotovelo descança no joelho direito, ficando a perna direita sobre o joelho esquerdo.

Observar a distancia entre o Sol e a Lua.

369. Ponha-se o óculo no seu lugar, e os fios parallelos ao plano do instrumento; então se o espelho central for meio estanhado, e meio tinto de preto, e se o Sol estiver muito brilhante, levante-se a chapa diante da parte estanhada do espelho; dirija-se o óculo ou á parte transparente do espelho horizontal, ou á linha, que separa a parte estanhada da transpa-

rente, ſegundo o eſplendor do Sol, e abaixe-ſe hum dos vidros córados; pegue-ſe no ſextante de maneira, que o ſeu plano prolongado paſſe pelo Sol e pela Lua, tendo o roſto do inſtrumento para cima ou para baixo, conforme o Sol eſtiver á direita ou á eſquerda da Lua; dirija-ſe a viſta á lua por meio do óculo, e mova-ſe a alidade até que o limbo do Sol eſteja quaſi em contacto com o limbo allumiado da lua; fixe-ſe a alidade, e por hum movimento brando do inſtrumento faça-ſe a imagem do Sol mover-ſe alternadamente atraz da lua, e naquella poſição em que os limbos eſtiverem mais perto hum do outro, faça-ſe perfeita a coincidencia dos limbos por meio do paraſuſo. Feito iſto, leão-ſe os gráos e partes de gráos marcados no limbo da alidade, uſando do microſcopio; e deſte modo ſe conſeguirá a diſtancia angular entre os limbos do Sol e da lua.

Entre a lua e huma eſtrella.

370. Dirija-ſe o meio do campo do óculo á linha da ſeparação das partes eſtanhada e tranſparente do eſpelho horizontal; ſe a lua eſtiver muito brilhante, abaixe-ſe o vidro córado mais claro, e pegue-ſe no ſextante de maneira, que o ſeu plano ſeja parallelo ao que paſſa pelo olho do obſervador e pelos dois objectos; com o roſto para cima, ſe a lua eſtiver á direita da eſtrella. Dirija-ſe a viſta pelo óculo á eſtrella, e mova-ſe a alidade até que a lua pela reflexão appareça proximamente em contacto com a eſtrella; fixe-ſe a alidade, e o mais como acima.

371. He algumas vezes difficultoſo aos que não eſtão coſtumados a obſervações deſta natureza, achar a imagem reflexa do eſpelho horizontal; ſeria talvez mais conveniente olhar directamente para o objecto, e movendo a alidade, fazer a ſua imagem coincidir com a imagem directa; ou, ſe a diſtancia entre os objectos for proximamente conhecida, deve-ſe pôr a alidade naquella diſtancia; dirigindo-ſe a viſta a hum

dos objectos, e suſtentando-ſe o ſextante, como fica dito, ver-ſe-ha o outro objecto no campo do óculo.

Altura dos aſtros.

O Sextante ſerve, como qualquer dos outros inſtrumentos de reflexão para tomar a altura dos aſtros.

I. Do Sol.

372. Abaixe-ſe hum dos vidros côrados, para diante do eſpelho horizontal, conforme o eſplendor do Sol; ponha-ſe o olho no óculo ſem vidro, dirija-ſe a viſta á parte do horizonte que eſtá debaixo do Sol, e mova-ſe a alidade até que a imagem córada do Sol appareça no eſpelho horizontal; dê-ſe então ao ſextante hum movimento vibratorio brando, em torno do eixo de visão; mova-ſe a alidade até que o limbo inferior ou ſuperior do Sol eſteja em contacto com o horizonte, e os gráos e minutos, que moſtrar o index no limbo do ſextante, ſerá a altura obſervada do Sol.

Da Lua.

373. Ponha-ſe o index em 0, abaixe-ſe o vidro verde, ponha-ſe o olho no eixo do tubo, e dirija-ſe a viſta á lua; a qual ſendo achada na parte eſtanhada do eſpelho horizontal, mova-ſe gradualmente a alidade, e acompanhe-ſe a imagem reflexa da lua até que o limbo allumiado fique em contacto com o horizonte na parte inferior do arco deſcrito pelo movimento de rotação, e a alidade moſtrará a ultura obſervada daquelle limbo da lua, que ſe poz em contacto com o horizonte. Sendo a obſervação feita de dia, he deſneceſſario o vidro córado.

De huma eſtrella, ou planeta.

374. Ponha-ſe o indice em zero, dirija-ſe a viſta

á eſtrella pelo tubo e a parte tranſparente do eſpelho horizontal; mova-ſe o plano do inſtrumento hum pouco para a eſquerda, e ver-ſe-ha a eſtrella na parte eſtanhada do eſpelho; mova-ſe o indice, até que a eſtrella fique em contacto com o horizonte na parte inferior do arco deſcrito; e os gráos e minutos, que moſtrar a alidade, ſerá a altura obſervada da eſtrella.

Advertencia. Não nos cançamos mais com a conſtrucção dos inſtrumentos de reflexão, porque em outro lugar (*a*) faremos a deſcripção do circulo repetidor de *Borda*, de hum uſo muito mais extenſo. E eſte meſme trabalho teve por motivo a applicação, que o engenheiro muitas vezes preciſa fazer do Sextante para medir angulos, quer ſobre huma arvore, ou qualquer outro ponto, onde não ſe póde uſar do circulo, já meſmo ſobre hum lago, ou rio.

CAPITULO II.

Problemas relativos áo movimento do Sol.

PROBLEMA I.

375. *Dada a declinação do Sol, e a latitude do lugar, achar a hora do ſeu naſcimento, e o azimuth naquella hora.*

Soluc. O Sol naſce em b (fig. 36), e no triangulo bZP, $bZ = 90°$, $bP = comp.\ decl.$, $PZ = comp.lat.$ Por tanto (Trig. 74)

$R \times cos.ZPb = cot.bP \times cot.ZP$, ou $R \times cos.ang, hor. = tang.\ dec. \times tang.\ lat.$, ou

$L\,tang.\ dec. + L\,tang.\ lat. - 10 = log.\ cos.\ ang.\ hor.$ deſde o meio dia, que convertido em tempo, a ra-

(*a*) Elementos de Geodeſia.

zão de 15° por hora, e tirado de 12 horas, dá o tempo apparente do nafcer. Igualmente

$$R \times cos.bP = fen.ZP \times cos.PZb, \text{ ou}$$
$$R \times fen.\ dec. = cos.\ lat. \times cos.\ azim.;\ \text{logo}$$
$$10 + log.fen.\ decl. - log.\ cos.\ lat. = log.\ cos.azim.\ \text{do Norte.}$$

376. *Exemplo.* Dada a latitude do Rio de Janeiro 22°54'10'', achar a hora do nafcimento do Sol no dia mais comprido, e o azimuth áquella hora, fuppondo a maior declinação do Sol 23°28'.

Decl.	23°28'	tang.	9,6376106
Lat.	22°54'10''	tang.	9,6257996
∠hor.	100°34' 5''		9,2634102

(porque dever fer > 90°).

Convertido em tempo dá 6 horas 42'16'', que fubtrahidos de 12 horas, dá 5 horas 17'44'', tempo em que o centro do Sol eftá fobre o horizonte racional no dia mais comprido.

Agora

Decl.	23°28' 0''	10 + fen.	19,6001181
Lat.	22 54 10	cos.	9,9643382
Az.	64°23'12''	cos.	9.6357799

Quer dizer que no dia mais comprido o Sol nafce 64°23'12'' de Eft para o Sul.

PROBLEMA II.

377. *Achar a altura do Sol ás feis horas.*

O Sol eftá em *c* ás 6 horas, e o angulo ZP*c* he recto: por tanto $R \times cos.Zc = cos.ZP \times cos.Pc$, ou $R \times fen.alt. = fen.\ lat. \times fen.\ decl.$; logo

$$\text{Log.}\,\mathit{sen.\,lat.} + \text{L.}\,\mathit{sen.\,decl.} - 10 = \text{L.}\,\mathit{sen.\,alt.}$$

378. Tomando os dados do exemplo precedente, temos.

Lat.	22°54′10″	ſen.	9,5901378
Decl.	23 28 0	ſen.	9,16001181
Alt.	8°54′55″	ſen.	9,1902559.

PROBLEMA III.

379. *Achar a hora em que o Sol chega ao primeiro vertical* d, *e a ſua altura a eſſa hora.*

Neſte caſo, o angulo $dZP = 90°$; por tanto $R \times \mathit{cos.}\, dP = \mathit{cos.}\, ZP \times \mathit{cos.}\, Zd$, ou $R \times \mathit{sen.\,dec.} = \mathit{sen.\,lat.} \times \mathit{sen.\,alt.}$, por tanto

$$10 + \mathit{log.\,sen.\,dec.} - \mathit{log.\,sen.\,lat.} = \mathit{log.\,sen.\,alt.}$$

Do meſmo modo $R \times \mathit{cos.}\, ZPd = \mathit{cot.}\, Pd \times \mathit{tang.}\, PZ$, ou $R \times \mathit{cos.\,ang.\,hor.} = \mathit{tang.\,dec.} \times \mathit{cot.\,lat.}$; logo $\mathit{log.\,tang.\,dec.} + \mathit{log.\,cot.\,lat.} - 10 = \mathit{log.\,cos.\,ang.\,hor.}$, que convertido em tempo, dá o tempo deſde o meio dia apparente.

380. Com a latitude 38°42′25″, temos

Decl.	23°28′ 0″	10 + ſen.	19,6001181
Lat.	38 42 25	ſen.	9,7961143
Alt.	39°33′13″	ſen.	9,8040038
Decl.	23°28′ 0″	tang.	9,6376106
Lat.	38 42 25	cot.	10,0961777
∠ *ang. h.*	32°48′ 7″	cos.	9,7337883

e em tempo 2 horas, 11′12″.

PROBLEMA IV.

381. *Dada a latitude do lugar, a declinação do Sol, e a altura, achar a hora, e o ſeu azimuth.*

Seja x o lugar do Sol; então *ſen.* $Px \times$ *ſen.* $PZ : R^2 :: $ *ſen.* $\frac{1}{2}(Px + PZ + Zx) \times$ *ſen.* $\frac{1}{2}(Px + PZ - Zx) : $ *cos.* $^2 \frac{1}{2} ZPx$; por tanto, ZPx he conhecido, que convertido em tempo dá o intervallo do meio dia apparente. Depois, *ſen.* $Zx \times$ *ſen.* $ZP : R^2 ::$ *ſen.* $\frac{1}{2}(Zx + ZP + Px) \times$ *ſen.* $\frac{1}{2}(Zx + ZP - Px) : $ *cos.* $^2 \frac{1}{2} xZP$; o que faz conhecer o azimuth xZP contado do S.

382. *Exemplo.* Dada a latitude N, 34°55′, declinação do Sol 22°22′57″ N, e a verdadeira altura 36°59′39″, achar o tempo apparente.

$ZP = 55°5'$, $Zx = 53°0'21''$, $Px = 67°37'3''$; por tanto

$Px =$	67°37′ 3″	ar. cos. ſen.	0,0340168
$ZP =$	55 5 0	ar. cos. ſen.	0,0861939
$Zx =$	53 0 21		
Som.	175 42 24		
$\frac{1}{2}$S	87 51 12	ſen.	9,9996951
Zx	53 0 21		
Diff.	34 50 51	ſen.	9,7569358
		2)	19,8768416
			9,9384208

coſeno de 29°47′45″, metade do angulo ZPx, ∴ $ZPx = 59°35'30''$, que, reduzido a tempo, dá 3 horas 58′22″.

tempo depois do meio dia apparente. Pelo mesmo processo, se acha $xZP = 86^\circ 49' 2''$.

PROBLEMA V.

Dado o erro em altura, achar o erro em tempo.

383. Seja mn parallelo ao horizonte, e represente nx o erro em altura; então, como o calculo do tempo suppõe que não ha erro na declinação, devemos suppôr o corpo em m; em lugar de x, e por consequencia o angulo mPx, ou o arco qr, mede o erro em tempo.

Ora

$$nx : xm :: sen.nmx : R$$
$$mx : qr :: cos.rx : R$$

Logo

$$nx : qr :: sen.nmx \times cos.rx : R^2$$

$$\therefore qr = \frac{R^2}{sen.nmx \times cos.rx} \times nx;$$

mas $ZxP = nmx$, porque ambos são complementos de nxm; e $sen. ZxP$, ou $nmx : sen. ZP :: sen. xZP : sen. xP$, ou $cos. rx$, $\therefore sen. nmx \times cos. rx = sen. ZP \times sen. xZP$; donde se tira

$$qr = nx \times \frac{R^2}{sen.\ ZP \times sen.\ xZP} = nx \times \frac{R^2}{cos.\ lat. \times sen.\ azim.}$$

Logo o erro menor he no primeiro vertical. Por tanto todas as alturas, que se empregão para conhecer o tempo, se devem tomar, ou no primeiro vertical, ou o mais perto possivel.

384. *Exemplo.* Na latitude de $50^\circ 12'$, se o erro em altura em hum azimuth de $44^\circ 12'$ for $1'$, $qr = 1' \times$

$$\frac{r^2}{0{,}612\times 0{,}690} = 2',334 \text{ de grão} = 9'',336 \text{ de tempo.}$$

385. Logo a ſubida perpendicular de hum corpo he a mais lenta, quando elle eſtá no primeiro vertical; porque nx varía como *ſen. azim.* quando são dados qr e a latitude.

PROBLEMA VI.

Dada a latitude do lugar, e a declinação do Sol, achar a hora, em que começa o crepuſculo.

386. Suppõe-ſe que o crepuſculo começa quando o Sol eſtá 18° abaixo do horizonte, tem-ſe pois o cirlo hyk parallelo ao horizonte: e 18° abaixo, e o crepuſculo começará, quando o Sol chegar a y, e $Zy =$ 108°; por tanto $\mathit{ſen}.Py \times \mathit{ſen}.PZ : R^2 :: \mathit{ſen}.\frac{1}{2}(PZ + Py + 108°) \times \mathit{ſen}.(PZ + Py - 108°) : \cos.^2 \frac{1}{2} yPZ$; logo fica conhecido yPZ, que convertido em tempo, dá a diſtancia do meio dia verdadeiro.

PROBLEMA VII,

Determinar a aſcensão recta, declinação, latitude, e longitude dos corpos celeſtes,

387. Como o movimento diurno da terra he uniforme, tambem o são os apparentes dos córpos celeſtes, e porque elle he parallelo ao equador, os intervallos de tempo, em que duas eſtrellas paſsão pelo meridiano, eſtarão em proporção com o arco do equador intercepto entre os dois verticaes, que paſsão por elles; e por tanto, ſe hum creſcer uniformemente, o outro tambem creſcerá. Logo, ſe o relogio andar uniformemente, teremos a ſeguinte regra: *como o intervallo de tempo das paſſagens ſucceſſivas de qualquer*

eſtrella fixa pelo meridiano : o intervallo das paſſagens de quaeſquer duas eſtrellas :: 360°: *para a ſua differença de aſcensões rectas.* Pelo meſmo methodo acharemos a differença das aſcensões rectas do Sol ou da Lua, quando paſſa pelo meridiano, e huma eſtrella, e por tanto ſe for conhecida a da eſtrella, ſê-lo-ha tambem a do Sol, ou da Lua; conclusão, que ſerá ainda mais exacta, ſe as compararmos com muitas eſtrellas, e tomarmos a media.

388. O methodo práctico de achar a aſcensão recta de hum corpo por meio da aſcensão recta de huma eſtrella fixa, por hum relogio regulado pelo movimento ſyderal, ſe reduz ao ſeguinte : comece o relogio o ſeu movimento de 0 horas 0'0'' no inſtante, em que o primeiro ponto de aries eſtá no meridiano; quando huma eſtrella chegar ao meridiano, o relogio moſtrará a aſcensão recta apparente da eſtrella, avaliada em tempo, comtantoque o relogio não eſteja ſujeito a erro, porque elle moſtrará quanto o primeiro ponto de aries diſta do meridiano. Mas como o relogio he ſujeito a erro, podemos conhecer qual elle ſeja, iſto he, qual he a differença entre a aſcensão recta, que moſtra o relogio, e a aſcensão recta do ponto do equador, que então eſtá no meridiano. Iſto ſe faz comparando a aſcensão recta apparente de huma eſtrella, quando paſſa pelo meridiano com a aſcensão recta, que moſtra o relogio. Por exemplo, ſeja a aſcensão recta apparente de *Aldebaran* 4 horas 23'50'', quando a ſua paſſagem pelo meridiano he obſervada pelo relogio, e ſupponhamos que o relogio moſtra 4 horas 23'52''; então ha hum erro de 2'' no relogio, que dá á aſcensão recta da eſtrella 2'' mais do que deve. Se o relogio ſe comparar com muitas eſtrellas, e ſe tomar o erro medio, teremos mais exactamente o erro em tempo medio de todas as obſervações. Repetindo-ſe eſtas todos os dias; poder-ſe-ha conhecer o andamento do relogio, iſto he, quanto ſe adianta ou atraza. Conhecido aſſim o erro do relogio, ſe obſervarmos o tempo da verdadeira paſſagem de qual-

quer corpo, e applicarmos o erro do relogio, teremos a aſcensão recta do corpo. Por eſte methodo he que ſe achão ordinariamente nos obſervatorios as aſcensões rectas do Sol, da Lua, e dos planetas.

389. A declinação ſe acha com facilidade; tome-ſe a altura apparente de qualquer aſtro, quando paſſa pelo meridiano; corrija-ſe da parallaxe e da refracção, e ter-ſe-ha a verdadeira altura meridiana; a differença entre ella e a altura do equador (que já diſſemos ſer igual ao complemento de latitude) he a declinação pedida.

390. *Exemplo.* A 27 de Abril de 1774, a diſtancia do limbo inferior da Lua ao zenith, quando paſſou pelo meridiano de *Greenwich*, era 68°19'37'',3; a ſua parallaxe em altura era 56'19'',2, referindo-ſe á figura esferoidal da terra; o barometro eſtava em 29,58, e o thermometro em 49; pede-ſe a declinação.

Diſt. obſ, L. I. ao zenith		68°19'37'',3
Refr. corr. pelo bar. e therm.	+	2 23
		68 22 0 ,3
Parallaxe	−	56 19 ,2
Diſt. ver. L. I.		67 25 41 ,1
Semidiametro.	−	16 35
Diſt. verd. do cent. ao zen.		67 9 6 ,1
Latitude		51 28 40
Declinação Sul.		15 40 26 ,1

LIVRO III.

Dos movimentos dos Planetas.

CAPITULO I.

Do movimento de hum corpo em huma ellipſe em torno do ſeu fóco.

391. Como as orbitas, que os planetas primarios deſcrevem na ſua revolução em torno do Sol, são ellipſes, que tem o Sol em hum dos fócos, e cada hum deſcreve áreas iguaes em tempos iguaes, paſſaremos a deduzir deſtes principios as conſequencias, que nos parecerem neceſſarias na indagação dos ſeus movimentos. O ſegundo principio que citámos (a ſaber que os planetas deſcrevem áreas iguaes em tempos iguaes) moſtra que os planetas ſe movem em torno do Sol com velocidades deſiguaes (*a*).

(*a*) Porque, ſe APQ (fig. 37) for huma ellipſe deſcrita por hum planeta em torno do Sol em S; a área infinitamente pequena Sp deſcrita em hum tempo dado, ſerá conſtante, tire-ſe Pr perpendicular a Sp; e como a área SPp he conſtante para o meſmo tempo, Pr varía como $\frac{1}{Sp}$; mas o angulo PSp varía como $\frac{Pr}{Sp}$, e por tanto como $\frac{1}{Sp^2}$; iſto he, na meſ-

Por tanto, temos que refolver o problema feguinte: dado o tempo periodico de hum planeta, o tempo do feu movimento do aphelio, e a excentricidade da fua orbita, achar a fua diftancia angular á aphelia, ou a fua anomalia verdadeira, e a fua diftancia ao Sol. Efte problema tem o nome de *Kepler*, que o propoz. Não fabia elle methodo direc̃to de refolve-lo, e por tanto o fez por tentativas muito longas e faftidiofas.

392. Seja AGQ (fig. 38) a ellipfe defcrita por hum corpo em torno do Sol, em S, hum dos feus fócos, AQ o eixo maior, CG o femieixo menor, A o aphelio, Q o perihelio, P o lugar do planeta, AVQE hum circulo, C o feu centro; tire-fe NPI perpendicular a AQ, tirem-fe PS, NS e NC, fobre a qual produzida fe abaixe a perpendicular ST. Mova-fe uniformemente hum planeta no circulo de A para D, com a velocidade angular media do corpo na ellipfe; em quanto o corpo fe move na ellipfe de A para P, o angulo ACD he a anomalia media, e o angulo ASP a verdadeira, e a differença deftes dois angulos a *equação do centro*. Seja p o tempo periodico na ellipfe, ou circulo (porque os tempos periodicos são iguaes

---

ma orbita as velocidades angulares dos planetas varíão na razão inverfa dos quadrados das fuas diftancias ao Sol. Em differentes planetas as áreas defcritas no mefmo tempo não são iguaes, e por tanto P*r* varía como $\frac{\text{área SP}p}{\text{S}p}$; confequentemente o angulo PSp varía como $\frac{\text{área SP}p}{\text{S}p^2}$; ifto he, as velocidades angulares de differentes planetas eftão na razão direc̃ta das áreas defcritas no mefmo tempo, e na inverfa dos quadrados das fuas diftancias ao Sol.

por hypothefe), e $t=0$ tempo, em que fe defcreve AP ou AD; então, como os corpos na ellipfe e no circulo defcrevem áreas iguaes em tempos iguaes em torno de S, e C, refpectivamente, temos

área ADC : área do circulo :: $t : p$
área da ellipfe : área ASP :: $p : t$,

e tambem

área do circ. : área da ellipfe :: área ASN : área ASP. Por tanto, área ADC : área ASP : : área ASN : área ASP; donde ADC=ASN; tirando a área ACN, commum a ambas, e a área DCN=SNC; mas DCN $= \frac{1}{2}$ DN × CN, e SNC $= \frac{1}{2}$ST × CN; logo ST=DN. Ora, fe for dado t, ferá dado o arco AD; porque, como o corpo no circulo fe move uniformemente, temos $p : t : : 360^\circ$: AD. Defte modo podemos achar a anomalia media em qualquer tempo dado, conhecendo o tempo, em que hum corpo efteve no aphelio; por tanto, fe podermos achar ST, ou ND, conheceremos o angulo NCA, que fe chama anomalia *excentrica*, por meio da qual poderemos por huma proporção achar o angulo ASP, que he a anomalia *verdadeira*. Pelo que o problema fe reduz a ifto: achar hum triangulo CST, tal, que o angulo C + os gráos de hum arco igual a ST, feja igual ao angulo dado ACD. Ifto fe póde fazer defpachadamente por tentativas, da maneira feguinte, que *la Caille* dá na fua Aftronomia. Ache-fe qual arco da circumferencia do circulo ADQE he igual a CA, dizendo, 355 : 113 : : 180° : 57°17′44″,8, numero de gráos do arco igual ao raio CA; logo CA : CS : : 57°17′44″,8 : os gráos de hum arco igual a CS. Tome-fe por tanto o angulo SCT, multiplique-fe o feu feno pelos gráos de CS, e ajunte-fe ao angulo SCT, e fe for igual ao angulo dado ACD, a fuppofição foi verdadeira; fe não, ajunte-fe a differença á primeira hypothefe, ou della fe tire, fegundo o resultado for menor ou maior do que ACD, e repita-se a operação, e em muito poucas tentativas, ter-se-ha o valor exacto do angulo SCT. Os gráos de ST se podem obter facilmente, ajuntando o logarithmo de CS ao logarithmo do seno do angulo SCT, e subtrahindo 10 da caracteristica, e o resto será o logarithmo dos gráos de ST. Achado o valor de AN, ou o angulo ACN, passaremos a achar o angulo ASP.

393. Seja v o outro fóco, e $AC = 1$; então $SP^2 - Pv^2 = vS^2 + 2vS \times vI = (vS + 2vI) \times US = (2Cv + 2vI) \times 2SC = 2CI \times 2SC$; logo, $SP + Pv : 2CI :: 2CS : SP - Pv$, ou $2 : 2CI :: 2SC : SP - (2 - SP)$, ou $1 : CI :: SC : SP - 1$; logo $SP = 1 + CS \times CI = 1 + CS \times cos. \angle ACN$. Mas $\frac{CS + cos.ACN}{1 + CS \times cos.ACN}$;

$$\text{Logo } (tang.\ \tfrac{1}{2}\ ASP)^2 \left(= \frac{1 - cos.ASP}{1 + cos.ASP} \right) =$$

$$\frac{1 + CS \times cos.ACN - CS - cos.ACN}{1 + CS \times cos.ACN + CS + cos.ACN} =$$

$$\frac{1 - CS + cos.ACN \times (CS - 1)}{1 + CS + cos.ACN \times (CS + 1)} =$$

$$\frac{SQ - cos.ACN \times SQ}{SA + cos.ACN \times SA} = \frac{1 - cos.ACN}{1 + cos.ACN} \times \frac{SQ}{SA} =$$

$(tang.\ \tfrac{1}{2} ACN)^2 \times \frac{SQ}{SA}$; por tanto $\sqrt{SA} : \sqrt{SQ} ::$ $tang.\ \tfrac{1}{2}\ ACN : tang.\ \tfrac{1}{2}\ ASP$; consequentemente temos a verdadeira anomalia ASP.

394. *Exemplo*. Pede-se o verdadeiro lugar de *Mercurio* a 26 de Agosto de 1740, ao meio dia, a equação do centro, e a sua distancia ao Sol.

Conforme a Astronomia de *la Caille*, Mercurio eſteve no ſeu aphelio a 9 de Agoſto ás 6 horas 37'. Por tanto a 26 de Agoſto, havia paſſado o ſeu aphelio ha 16 dias 17 horas 23'; por tanto 87 dias 23 horas 15'32'' (tempo de huma revolução) : 16 dias 17 horas 23' : : 360° : 68°26'28'', arco AD, ou anomalia media. Ora, (conforme aquelle author) CA : CS : : 1011276 : 211165 (392) : : 57°17'44'',8 : 11°57'50''=43070'', valor de CS reduzido a arco de circulo, cujo logarithmo he 4,6341749. De mais 68°26'28''=246388''. Supponha-ſe o angulo SCT de 60°=216000'', e a operação (392) para achar o angulo ACN ſerá a ſeguinte

4,6341749	
9 9,9375306 log. de	216000=a,
4,5717055	37300
	253300
	246388
	6912=b
4,6341749	
9,9287987	209088=$a-b$=58° 4'48''=c
4,5629736	36557
	245645
	246388
	743=d
4,6341749	
9,9297694	209831=$c+d$=58°17'11''=e
4,5639443	36639

	246470
	246388
	$82 = f$
4,6341749	
9,9296626	$209749 = e - f = 58°15'49'' = g$
4,5638375	36630
	246379
	246488
	$9 = h$;

por tanto como a differença entre o valor deduzido da hypothefe e o verdadeiro eftá agora diminuido quafi nove vezes em cada operação, a differença feguinte ferá 1''; por tanto fe acrefcentarmos h a g, e fubtrahirmos 1'', teremos 58°15'57'', para valor verdadeiro do angulo ACN, *anomalia excentrica*. Por meio defta acharemos a anomalia *verdadeira* ASP, por logarithmos

Log. tang. 29°7'58''½	9,7461246
½ Log. SQ = 800111	2,9515751
	12,6976997
½ Log. SA = 1222441	3,0436141
Log. tang. 24016'15''	9,6540856

Logo a anomalia verdadeira he 48°32 30''. Ora o aphelio A eftava em 8 fignos 13°54 30''; logo o verdadeiro lugar de Mercurio era 10 fignos 2°27'. Por tanto (392) 68°26'28''—48°32'30'' = 19°53'58'', he *a equação do centro*. Tambem SP = 1 + CS × *cos.*∠ACN = 1,10983, diftancia de Mercurio ao Sol, fendo unidade o raio do circulo, ou a diftancia media do planeta. Defta maneira podemos calcular ao mefmo tempo, o lugar de hum planeta na fua orbita, e a fua diftancia ao Sol, e efte methodo de calcular a anomalia excentrica he de todos o mais fimples e facil de applicar-fe, e capaz de qualquer exacção.

395. Como os còrpos D e P, partidos de A ao mefmo tempo, hão de coincidir outra vez em Q, fendo ADQ, APQ defcritos em metade do tempo de huma revolução; e o planeta em A fe move com a menor velocidade angular, por tanto de A até Q, ou nos primeiros feis fignos de anomalia, o angulo ACD ferá maior do que ASP, ou a anomalia *media* ferá maior do que a verdadeira; mas de Q até A, ou nos ultimos feis fignos, como o planeta em Q fe move com a maior velocidade angular, a anomalia *verdadeira* ferá maior do que a media. Quando a equação he a maxima hindo de A para Q, o lugar *medio* eftá antes do verdadeiro a quantidade defignada pela equação, e de Q até A o lugar verdadeiro eftá antes do medio a equação; por tanto defde que a equação he a maxima até vir a fer outra vez maxima, a differença entre os movimentos verdadeiro e medio he dupla da equação. Do apogeo ao perigeo, os movimentos verdadeiro e medio são os mefmos.

396. Dadas as dimensões da orbita, fe póde achar facilmente a maxima equação do centro. Porque como a velocidade angular do corpo no circulo he maior do que a da ellipfe em torno de S, a equação augmentará, quando o corpo fe affaftar de A e Z, e quando vem a fer iguaes, a equação deve fer a maior; ifto por tanto acontece quando (fig.39) $\frac{1}{SP^2} = \frac{1}{SW^2} = \frac{1}{AC\times CE}$; ou $AC\times CE = SP^2$; logo SP fica conhecido. Reprefente SW efte valor de SP; como conhecemos SW, FW ($=2AC-SW$), ferá conhecido, e como SF he conhecido, podemos achar

o angulo FSW, que he a anomalia verdadeira. Mas (*fig.*38) $\sqrt{SQ} : \sqrt{SA} : :$ *tang.*$\frac{1}{2}$ anom. *verd.* : *tang.*$\frac{1}{2}$ *excen.* anom. ACN, ou *tang.*$\frac{1}{2}$ SCF (393); por tanto como nos conhecemos SC, podemos achar ST ou ND; e para converter eſte em gráos, diremos, R=1 : ND : : 57°17'44'',8: os gráos de ND, que ſommados ou ſubtrahidos do angulo ACN, dão ACD, anomalia *media*, a differença entre a qual e a *verdadeira* anomalia he a *maxima* equação. Deſte modo podemos achar a equação em qualquer tempo, ſendo dado SP.

397. Conhecida a maior equação do centro, ſe conhece a excentricidade, e por conſequencia as dimensões da orbita. Porque a equação he maxima quando a diſtancia he media entre os ſemieixos maior e menor, e por tanto nas orbitas proximamente circulares, o corpo deve eſtar proximo ao extremo do eixo menor, e por conſequencia o angulo NCA, ou SCT, ſerá quaſi recto, por tanto ST he quaſi igual a SC; e igualmente NSA ſerá quaſi igual a PSA. Ora, o angulo NCA—NSA(PSA)=NSC, e DCA—NCA=DCN; ſommando DCA—PSA=DCN+SCN; que (porque NC he quaſi parallelo a DS) he proximamente igual a 2DCN; iſto he, a differença entre a anomalia verdadeira e a media, ou a equação do centro, he quaſi igual ao dobro do arco DN, ou o dobro de ST, ou quaſi o dobro de SC. Donde ſe tira, 57°17'44'',8 : metade da maxima equação : : raio=1 : SC, excentricidade. Mas ſe a orbita for conſideravelmente excentrica, compare-ſe á maxima equação a ſua excentricidade; e então, como a equação varía proximamente, como SC, faça-ſe a proporção, a equação calculada : excentricidade achada : : a maxima equação : verdadeira excentricidade.

398. *Exemplo.* Se ſuppozermos, como Mr. de *la Caille*, que a maior equação de Mercurio he 24°3'5''; então 57°17'44'',8 : 12°1'32'',5 : : 1 : 0,209888, excentricidade muito proximamente.

Ora, a maior equação calculada pela excentricidade he 23°54'28'',5; logo 23°54'28'',5 : 24°3'5'' : :

0,209888 : 0,211165, excentricidade verdadeira. *Lallande* faz a maior equação $23°40'$; e a excentricidade 0,207745.

399. O problema reciproco, isto he, dadas a excentricidade, e a verdadeira anomalia, achar a media, se resolve directamente e com muita facilidade. Sendo dada a excentricidade, he conhecida a razão do eixo maior ao menor (*a*), que he a razão de NI para PI; por tanto o angulo ASP sendo dado, temos PI : NI : : *tang*. ASP : *tang*. ASN; por tanto, no triangulo NCS; conhecemos NC, CS, e o angulo CSN, para achar o angulo SCN, o supplemento do qual he o angulo ACN, ou SCT; logo no triangulo rectangulo STC, conhecemos SC, e o angulo SCT, para achar ST, que he igual a ND, arco, que mede a equação, o qual se póde achar por esta proporção R : ST : : $57°17'44'',8$: os gráos de ND, que sommados com ACN, dão ACD, anomalia media.

CAPITULO II.

Das opposições, e conjunções dos planetas.

400. AS mais importantes observações para determinar os elementos da orbita são, o lugar, e o tempo da opposição de hum planeta superior, ou a conjunção de hum inferior, porque naquella occasião a longitude observada he a mesma que a verdadeira, ou vista do Sol; por isso, se as observações forem feitas em qualquer outro tempo, deveremos reduzir a longitude observada á verdadeira, o que requer o conhecimento de suas distancias relativas, exterior

---

(*a*) Porque como se conhece AC, CS, temos

$$GC = \sqrt{(SG^2 - SC^2)} = \sqrt{(AC^2 - SC^2)}\sqrt{=}((AC + SC) \times (AC - SC)).$$

a conjuncaõ de um planeta exterior tem duas
somente uma exterior e outra interior

e que á aquelle tempo ſe ſuppõe não conhecidas. Além diſto ellas fornecem os melhores meios de examinar e corrigir as taboas dos movimentos dos planetas, comparando os lugares calculados com os obſervados.

401. Para determinar o tempo da oppoſição, obſerve-ſe quando o planeta chega muito perto daquella ſituação, o tempo em que paſſa o meridiano, e a ſua aſcensão recta; tome-ſe a ſua altura meridiana; faça-ſe o meſmo ao Sol; e repitão-ſe as obſervações muitos dias. Pelas alturas meridianas obſervadas ſe achem as declinações, e com as aſcensões rectas e declinações ſe calculem as latitudes e longitudes do planeta e as longitudes do Sol. Então tome-ſe hum dia, em que a differença das ſuas longitudes he proximamente 180°, e para aquelle dia ſe reduza a longitude do Sol, achada por obſervação, quando paſſou pelo meridiano, á longitude achada na hora em que paſſou o planeta (*t*), achando por obſervação, ou pelo calculo, a razão em que creſce a longitude. Ora, em oppoſição, o planeta he retrogrado, e por tanto a differença entre as longitudes do planeta e do Sol creſce a ſomma dos ſeus movimentos. Donde reſulta a ſeguinte regra: como a ſomma (S) dos ſeus movimentos diarios em longitude : para a differença (D) entre 180° e a differença de ſuas longitudes reduzidas ao meſmo tempo (*a*), (ſubtrahindo a longitude do Sol da do planeta para ter a differença viſta do Sol, ſegundo a ordem dos ſignos) : : 24 horas : intervallo entre aquelle tempo (*t*) e o tempo

---

(*a*) Porque eſta differença moſtra quanto o planeta diſta da oppoſição; e a proporção ſe funda neſte principio, que o Sol ſe approxima ao aſtro por eſpaços proporcionaes aos tempos : por tanto os eſpaços S, D, eſtão como os tempos 24 horas e o tempo (*t*) da oppoſição.

da oppoſição. Eſte intervallo ſommado, ou ſubtrahido do tempo (t) conforme a differença de ſuas longitudes naquelle tempo era maior ou menor do que 180°, dá o tempo da oppoſição. Se iſto ſe repetir muitos dias, e ſe tomar o reſultado medio, teremos o tempo mais exactamente. E ſe compararmos o tempo da oppoſição achado pela obſervação com o tempo do calculo, ſegundo as taboas, a differença ſerá o erro das taboas, que póde ſervir como meio de corrigi-los.

402. *Exemplo*. A 24 de Outubro de 1763, *Lallande* obſervou a differença entre as aſcensões rectas de β de *Aries* e *Saturno*, que paſſou pelo meridiano ás 12 horas 17′17″, tempo verdadeiro, e achou que era 8°5′7″, paſſando primeiro a eſtrella. Ora a aſcensão recta verdadeira da eſtrella á aquella hora era 25°24′33″,6; logo a aſcensão recta verdadeira de Saturno era 1 ſigno 3°29′40″,6 ás 12 horas 17′17″ de tempo verdadeiro, ou 12 horas 1′37″ tempo medio. No meſmo dia achou por obſervação da altura meridiana de Saturno, que a ſua declinação era 10°35′20″ N. Com a aſcenſão recta e declinação de Saturno, calculou a ſua longitude 1 ſigno 4°50′56″, e a latitude 2°43′25″ S. Ao meſmo tempo, a longitude do Sol ſe achou pelo calculo 7 ſignos 1°19′22″, que ſubtrahida de 1 ſigno 4°50′56″ dá 6 ſignos 3°31′34″; logo Saturno eſtava 3°31′34″ além da oppoſição, mas ſendo retrogrado o ſeu movimento, elle deve depois chegar a oppoſição. Ora, pelas obſervações feitas muitos dias a aquelle tempo, ſe achou que a longitude de Saturno diminuia 4′50″ em 24 horas, e pelo calculo a longitude do Sol augmentava 59′59″ ao meſmo tempo; cuja ſomma he 64′49″; logo 64′49″ : 3°31′34″ : : 24 horas : 78 horas 20′20″, que ſommadas com 24 de Outubro ás 12 horas 1′37″ dão 27 dias 18 horas 21′57″, para tempo da oppoſição. Podemos por tanto achar a longitude de Saturno ao tempo da oppoſição, dizendo 24 horas : 78 horas 20′20″ : : 4′50″ : 15′47″, movimento retrogrado de Saturno em 78 horas 20′20″, que ſubtrahido de 1 ſigno 4°50′56″, dá 1 ſigno

4°35'9'', longitude de Saturno no tempo da oppofição. De hum modo fimilhante podemos achar a longitude do Sol ao mefmo tempo, para provar a oppofição; porque 24 horas : 78 horas 20'20'' : : 59'59'' : 3°15'47'', que juntos a 7 fignos 1°19'22'', longitude do Sol ao tempo da obfervação, dá 7 fignos 4°35'9'', para a longitude do Sol no tempo da oppofição, que he exactamente oppofta á de Saturno. Podemos tambem achar a latitude de Saturno ao mefmo tempo, obfervando fimilhantemente a variação diaria, ou calculando pelas taboas depois de conhecidos os elementos de feus movimentos, e conftruidas as taboas; pelas quaes fe vê que no intervallo entre os tempos da obfervação e oppofição, a latitude crefceu 6', e por confequencia a latitude era 2°43'31''. Defte modo achamos o tempo da oppofição de todos os planetas fuperiores.

403. Póde-fe achar fimilhantemente o lugar e tempo da conjunção de hum planeta inferior, quando a elongação do planeta ao Sol, perto do tempo da conjunção, he fufficiente para a fazer vifivel; por tanto a occafião mais favoravel he neceffariamente quando a latitude geocentrica do planeta no tempo da conjunção he a maxima. No anno de 1689, Venus eftava na fua conjunção inferior a 25 de Junho, e foi obfervada a 21, 22, e 23; pelas quaes obfervações a fua conjunção fe achou fer ás 13 horas 46', tempo verdadeiro em Paris, na longitude ♋4°53'40'', e latitude 3°1'40'' N. Para fe poder obfervar o tempo e o lugar da conjunção fuperior, he neceffario que feja muito favoravel o eftado da athmosfera; porque como Venus eftá então quafi feis vezes mais longe da terra, do que na fua conjunção inferior, o feu diametro apparente, e a quantidade de luz, que delle recebemos, são tão pequenos, que he difficil percebe-los. Porém o methodo mais exacto de obfervar o tempo de huma conjunção inferior de Venus e de Mercurio, he por obfervações feitas nas duas paffagens fobre o difco do Sol.

0, 3, 6, 12, 24, 48, 9
4, 7, 10, 16, 28, 52, 10
Mer Ven. Terr, Mars Pal. Jup

CAPITULO III.

Dos movimentos medios dos planetas.

404. Com muita facilidade se determinão os movimentos medios dos planetas, pelas suas conjuncões e opposições, conhecendo-se o lugar do aphelio e as excentricidades de suas orbitas; porque então podemos achar a equação da orbita, e reduzir o lugar *verdadeiro ao medio*; e determinados os lugares medios em dois instantes, elles dão o movimento medio correspondente ao intervallo entre elles. Porém he melhor achar o lugar do aphelio pelo movimento medio. Por tanto para determinar o movimento medio, independente do lugar do aphelio, devemos examinar as opposições ou conjunções, que acontecem muito proximamente no mesmo ponto do Ceo; porque então o planeta estando quasi no mesmo ponto da sua orbita, a equação será muito proximamente a mesma em cada observação, e por tanto a comparação entre os lugares verdadeiros será quasi huma comparação dos seus lugares medios. Se a equação differir muito nas duas observações, deve-se attender a isto. Ora, comparando as observações modernas, podemos determinar proximamente o tempo de huma revolução; e então, comparando as observações modernas com as antigas, se determinará com muita exactidão o movimento medio. Como isto se explica melhor em hum exemplo, daremos hum de *Cassini* (Elem, d'Astron. p. 362), com as explicações competentes.

405. *Exemplo.* A 16 de Setembro de 1701, Saturno estava em opposição ás 2 horas, quando o lugar do Sol era ♍ 23°21′16″, e por consequencia Saturno em ♓ 23°21′16″, com 2°27′45″ de latitude Sul. A 10 de Setembro de 1730, a opposição era ás 12 horas 27′, e Saturno em ♓ 17°53′57″ com 2°19′6″

de latitude Sul. A 23 de Setembro de 1731 a oppofição era ás 15 horas 51′ em ♈ 0°30′50″, com 2°36′55″ de latitude Sul. Ora, o intervallo das duas primeiras obfervações foi 29 annos (dos quaes 7 biffextos) menos 5 dias 13 horas 33′; e a differença das duas ultimas 1 anno 13 dias 3 horas 24′. A differença dos lugares de Saturno nas duas primeiras obfervações era 5°27′19″, e nas duas ultimas 12°36′53″. Por tanto em 1 anno 13 dias 3 horas 24′ o movimento de Saturno foi 12°36′53″; donde 12°36′53″ : 5°27′19″ :: 1 anno 13 dias 3 horas 24′ : 163 dias 12 horas 41′, tempo em que o movimento foi 5°27′19″, muito proximamente, porque eftando Saturno quafi no mefmo lugar da fua orbita, mover-fe-ha quafi com a mefma velocidade; logo, ajuntando ifto ao intervallo entre as duas primeiras obfervações (porque na fegunda obfervação faltavão 5°27′19″ para Saturno eftar no lugar da primeira) dá 29 annos communs 164 dias 23 horas 8′, para o tempo de huma revolução. Faremos pois efta proporção 29 annos 164 dias 23 horas 8′ : 365 dias :: 360° : 12°13′23″50‴, movimento medio annuo de Saturno em hum anno commum de 365 dias; ifto he, movimento em hum anno, fe elle fe moveffe uniformemente. Se dividirmos ifto por 365, teremos 2′0″28‴ para o movimento medio diario de Saturno. O movimento medio affim determinado ferá fufficientemente exacto para determinar o numero de revoluções, que o planeta deve ter feito, quando compararmos as obfervações modernas com as antigas para determinarmos mais exactamente o movimento medio.

406. As mais antigas obfervações que temos da oppofição de Saturno forão a 2 de Março de 228 antes de Jefu Chrifto, huma hora depois do meio dia, no meridiano de Paris, eftando então Saturno em ♍ 8°23′ com 2°50′ Lat. Norte, A 26 de Fevereiro de 1714 ás 8 horas 15′ achou-fe Saturno em oppofição em ♍ 7°56′46″ com 2°3′ de lat. Norte. Defte tempo fubtrahimos 11 dias para o reduzir ao eftilo Juliano (da primeira

obſervação), e por conſequencia eſta oppoſição aconteceu a 15 de Fevereiro ás 8 horas 15′. Por tanto a differença entre eſtes dois lugares era ſómente 26′14″. A oppoſição de 1715 foi a 11 de Março ás 16 horas 55′, eſtando então Saturno em ♍21 3 14″ com 2°25′ lat. N. Ora, entre as duas primeiras oppoſições havia 1942 annos (dos quaes 485 forão biſſextos) menos 14 dias 16 horas 45′, iſto he, 1943 annos communs e 105 dias 7 horas 15′ mais. O intervallo entre as duas ultimas oppoſições era 378 dias 8 horas 40′, durante o qual Saturno ſe moveu 13°6′28″; por tanto 13°6′28″ : 26′14″ :: 378 dias 8 horas 40′ : 13 dias 14′, que accreſcentados ao tempo da oppoſição em 1714, dão o tempo, em que o planeta tinha a meſma longitude que na oppoſição 228 annos antes de Jeſu Chriſto. Eſta quantidade ſommada com 1943 annos communs 105 dias 7′15″ dá 1943 annos 118 dias 21 horas 15′, no qual intervallo Saturno fez hum certo numero de revoluções completas. Havendo achado pelas obſervações modernas, que o tempo de huma revolução he muito proximamente 29 annos communs, 164 dias 23 horas 8′, ſegue-ſe que houverão 66 revoluções no referido intervallo; dividindo por tanto aquelle intervallo por 66, temos 29 annos 162 dias 4 horas 27′ pelo tempo de huma revolução. Comparando as oppoſições nos annos de 1714 e 1715, o verdadeiro movimento de Saturno he muito proximamente igual ao movimento medio, o que moſtra que as oppoſições forão obſervadas muito perto da diſtancia media; conſequentemente o movimento do aphelio não póde haver cauſado erro algum conſideravel na determinação do movimento medio. Por tanto o movimento medio annuo he 12°13′35″14‴, e o movimento medio diario 2′0″35‴. *Halley* faz o movimento annuo 12°13′21″. *La Place* 12°13′36″,8. Como a revolução alli determinada he relativa á longitude do planeta, deve ſer huma revolução tropica. Logo para termos a revolução ſyderal, faremos a proporção 2′0″35‴ : 24′42″20‴ (preceſsão no tempo de huma revolução tropica) : : (art. 320) 1 dia : 12 dias 7 horas 1'57'', que junto com 29 annos 162 dias 4 horas 27' dá 29 annos 174 dias 11 horas 28'57'', comprimento da hum anno ſyderal de Saturno. Deſte modo achamos os tempos periodicos de todos os planetas ſuperiores. Os tempos periodicos dos inferiores ſe achão pelas ſuas conjunções.

407. Os tempos periodicos dos planetas são os ſeguintes; Mercurio, 87 dias 23 horas 15'43'',6; Venus 224 dias 19 horas 49'10'',6; Marte 1 anno 321 dias 23 horas 30'35'',6; Jupiter 11 annos 315 dias 14 horas 27'10'',8; Saturno 29 annos 174 dias 1 hora 51' 11'',2; Herschell 83 annos 150 dias 18 horas; Ceres 4 annos 221 dias 12 horas 14'24''; Juno quaſi 3 annos.

CAPITULO IV.

Da maior equação, excentricidade, e lugar dos aphelios das orbitas dos planetas.

408. DEterminados os movimentos medios dos planetas, ſegue-ſe moſtrar o methodo de achar a maior equação das ſuas orbitas, a excentricidade, e o lugar do ſeu aphelio. Pois ainda que eſtas couſas ſe ſuppõe conhecidas para determinar com muita exactidão os movimentos medios, com tudo, ſem ellas, ſe podem determinar os movimentos medios tão aproximadamente verdadeiros, que delles ſe deduzão aquelles elementos com muita exactidão. Pelo principio de *Kepler* (art. 333) ſe póde achar a diſtancia de hum planeta ao Sol em qualquer ponto da ſua orbita. Por tanto o problema he, dadas de grandeza e poſição tres linhas tiradas do fóco de huma ellipſe, determinar a ellipſe.

409. Sejão (fig. 40) SB, SC, SD as tres linhas, produzão-ſe CB, CD; e tome-ſe SB : SC : : EB : EC; e SC : SD : : CF : DF; então SC—SB :

$SC :: BC : EC = \frac{SC \times BC}{SC - SB}$, e $SC - SD : SC :: DC : CF = \frac{SC \times DC}{SC - SD}$. Tire-ſe FE, e abaixem-ſe DK, CI, BH perpendiculares a ella. Os triangulos ſimilhantes dão $IC : HB :: EC : EB ::$ (por conſt.) $SC : SB$; e tambem $IC : KD :: CF : DF :: SC : SD$. Por tanto a proporção de IC, HB, KD he a meſma que de SC, SB, SD, conſequentemente EF he a directriz (*a*) da ellipſe, que paſſa por B, C, D. Por S tire-ſe ASQG perpendicular a FE; tome-ſe $GA : AS :: CI : CS$; e $GQ : SQ :: CI : CS$; então $CI + CS : CS :: GS : SQ = \frac{CS \times GS}{CI + CS}$: ſimilhantemente achamos $AS = \frac{CS \times GS}{CI - CS}$, e A, Q, ſerão os vertices das ſecções conicas.

410. *Calculo.* Nos triangulos SBC, SCD, conhecemos dois lados e os angulos comprehendidos, que são as diſtancias dos lugares obſervados na orbita; por tanto podemos achar BC, CD e os angulos BCS, SCD, e por conſequencia BCD. Conhecemos CE e CF, e o angulo ECF, e podemos achar o angulo CEF. Por tanto no triangulo rectangulo CIE, são dados CE e o angulo E; logo conheceremos CI. Tire-ſe SI; então no triangulo SIC conhecemos CI, CS, e o angulo SCI ($= BCS - ECI$); logo conhecemos SI, e os angulos CIS, CSI, e por conſequencia o angulo SIG; por tanto, no triangulo rectangulo

---

(*a*) Chama-ſe directriz huma recta perpendicular ao eixo no ponto, em que eſte he cortado pela tangente. *Vinc. Conic. Sec. D.* 8 *Ell.*

ao extremo da ordenada,
que paſſa pelo ~~foco da ordenada~~
foco

SGI, conhecemos SI e o angulo SIG, com os quaes acharemos SG. Conhecemos tambem SA, SQ, metade da differença das quaes he a excentricidade e a sua somma = AQ. Finalmente, no triangulo BSO (sendo O o outro fóco) conhecemos todos os lados, e calcularemos o angulo BSA distancia do aphelio ao lugar observado B.

411. No anno de 1740 a 17 de Julho, 26 de Agosto, e 6 de Setembro, *La Caille* achou as tres distancias de Mercurio (sendo a media 10000) seguintes; AB = 10351,5, SC = 11325,5, SD = 9672,166, o angulo BSC = 3 signos 27°0'35'', e CSD = 44°240'4''. Logo, BCS = 29°55'5'', BC = 18941, SCD = 56°49', CD = 8124,5, BCF = 86°44'5'', CE = 215004, CF = 55647, CEF = 14°41'44'', CI = 54543, CSI = 124°47'45'', CIS = 9°49'4'', SI = 47281, SIG = 80°10'56'', SG = 46589, SQ = 8010,5, SA = 12209, SO = 4198,5; logo a excentricidade = 2099,75, BSA = 71°37'23'', ou 2 signos 11°37'23'', que sommados com 6 signos 2°13'51'', posição de SB, dão 8 signos 13°51'14'' para o lugar do aphelio. Logo a maior equação he 24°3'5''.

412. Ora na mesma data, se póde achar o lugar do aphelio e da excentricidade da maneira seguinte. Faça-se o semi-eixo maior = 1, SB = a, SD = b, SC = c, o angulo BSD = v, BSC = u, BSQ = x, OS = e; metade do parametro = r. Pela propriedade da ellipse (*a*)

(*a*) A propriedade citada, que falta em muitos compendios, se demonstra facilmente. Ella se reduz á seguinte proposição.

$$SP = \frac{BC^2}{MC - SC \times cos.PSM} \text{ (fig. 41)}.$$

Tire-se PN perpendicular a AM. Então $MC^2 : BC^2$ ::

$a = \frac{r}{1 + e\ cos.\ x}$, $b = \frac{r}{1 + e\ cos.(v + x)}$; $c =$

$\frac{r}{1 + e cos.(u + x)}$; logo $r = a + ae.\ cos.x = b + be.\ cos.$ $(v + x) = c + ce.\ cos.\ (u + x)$: por tanto

$\frac{b - a}{a\ cos.x - b\ cos.\ (v + x)} = e = \frac{c - a}{a.\ cos.\ x - c\ cos.\ (u + x)}$;

ora em lugar de $cos.\ (v + x)$, e $cos.\ (u + x)$, substitua-

---

$AN \times NM : PN^2$: mas $BC^2 = SB^2 - SC^2 = MC^2 - SC^2$, e $AN \times NM = (MC + CN) \times (MC - CN) = MC^2 - CN^2 = MC^2 - (SN \mp SC)^2$; logo $MC^2 : MC^2 - SC^2 :: MC^2 - (SN \mp SC)^2 : PN^2 =$

$$\frac{(MC^2 - SC^2) \times (MC^2 - (SN \mp SC)^2)}{MC^2} =$$

$$\frac{MC^4 - MC^2 \times SN^2 \pm 2SN \times SC \times MC^2}{MC^2} -$$

$$\frac{2MC^2 \times SC^2 + SC^2 \times SN^2 \mp 2SN \times SC^3 + SC^4}{MC^2},$$

accrescentando SN^2 a cada membro , teremos SP^2

$$(= PN^2 + SN^2) = \frac{MC^4 \pm 2SN \times SC \times MC^2}{MC^2} -$$

$$\frac{2MC^2 \times SC^2 + SC^2 \times SN^2 \mp 2SN \times SC^3 + SC^4}{MC^2}$$

extrahindo a raiz quadrada

ſe $cos.v.cos.x - ſen.v.ſen.x$, e $cos.u\, cos.x - ſen.u\, ſen.x$; e teremos

$$\frac{b-a}{a\, cos.x - b\, cos.v.\, cos.x + b\, ſen.v\, ſen.x} =$$

$$\frac{c-a}{a\, cos.x - c\, cos.u\, cos.x + c\, ſen.u.ſen.x};$$

divida-ſe cada denominador por $cos.x$, e ter-ſe-ha

$$SP = \frac{MC^2 \pm SN \times SC - SC^2}{MC} = \frac{BC^2 \pm SN \times SC}{MC}$$

(porque $MC^2 - SC^2 = SB^2 - SC^2 = BC^2$); porém $\pm SN = SP \times cos.PSM$; logo $SP =$
$\frac{BC^2 + SC \times SP \times cos.PSM}{MC}$; donde ſe tira $SP =$

$$\frac{BC^2}{MC - SC \times cos.PSM}.$$

Para reduzir eſta propoſição á do texto, he preciſo lembrar que $AM : BD :: BD : p$ (parametro), e $p =$
$\frac{BD^2}{AM} = \frac{BD^2}{2}$, e $\frac{1}{2}p = \frac{BD^2}{4} \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 = BC^2$,

logo $r = BC^2$; e $cos.$ PSM no texto he $cos.$ ASB, que he negativo, e por tanto $cos.$ PSM repreſenta $-cos.x$. Subſtituindo, vem

$$SP = a = \frac{r}{1 + e\, cos.x}. \quad \text{Q. E. D.}$$

$$\frac{b-a}{a-b\cos.v+b\,\mathit{sen}.\,v\,\mathit{tang}.\,x}=$$

$$\frac{c-a}{a-c.\cos.u+c.\,\mathit{sen}.\,u\,\mathit{tang}.\,x};$$

logo

$$\mathit{tang}.\,x=\frac{b\,(c-a)\cos.\,v-c\,(b-a)\cos.\,u-a\,(c-b)}{b\,(c-a)\,\mathit{sen}.\,v-c\,(b-a)\,\mathit{sen}.\,u},$$ que

dá o lugar do perihelio. Conhecemos a excentricidade

$e=\dfrac{c-a}{a\cos.x-c.\cos.(u+x)}$; consequentemente $1-e$, e $1+e$, diſtancias perihelia e aphelia, são conhecidas. Determinados os elementos da ellipſe, o eixo maior ſe acha deſta maneira: calcule-ſe a anomalia media correſpondente ao angulo CSB: e diga-ſe, como a anomalia media: 360°: : o tempo em que foi deſcrito o angulo CSB: o tempo periodico. Conhecendo eſte, ſe acha o eixo maior, pela regra de *Kepler* (art. 334).

413. Os lugares do aphelio no principio de 1750 são, Mercurio 8 ſignos 13°33′58″; Venus, 10 ſignos 7°46′42″; Terra, 3 ſignos 8°37′16″; Marte 5 ſignos 1°28′14″; Jupiter, 6 ſignos 10°21′4″; Saturno 8 ſignos 28°9′7″; Herschel, 11 ſignos 16°19′30″; Ceres, 10 ſignos 26°8′42″ (em 1801).

414. As excentricidades das orbitas (ſendo a diſtancia media da terra 10000) são Mercurio 7955,4; Venus 498; Terra 1681,395; Marte, 14183,7; Jupiter, 25013,3; Saturno, 53640,42; Herschell, 90804; Ceres 7910.

415. As maiores equações são, Mercurio, 23°40′0″; Venus 0°47′20″; Terra 1°55′36″,5; Marte 10°40′40″; Jupiter, 5°30′38″,3; Saturno, 6°26′42″; Herschel, 5°27′16″.

416. Os aphelios das orbitas dos planetas tem hum movimento, que ſe póde achar, pelos lugares dos aphe-

lios de cada hum em dois differentes tempos. Eftes movimentos em longitude em 100 annos são, Mercurio, 1°33'45''; Venus, 1°21'0''; Terra, 1°43'35''; Marte, 1°51'40''; Jupiter, 1°34'33''; Saturno, 1°50'7''.

417. Segundo o calculo de *La Grange* o aphelio de Herschell, he progreffivo 3'',17 por anno, em virtude da acção de Jupiter e Saturno; confequentemente o feu movimento em longitude he 50'',25 + 3'',17 = 53'',42.

CAPITULO V.

Dos nodos e inclinações das orbitas dos planetas.

418. OBfervando o movimento dos planetas em huma revolução, fe achou que as fuas orbitas são inclinadas á ecliptica, porque fó duas vezes em cada revolução apparecem na ecliptica; e como frequentemente he neceffario reduzir os feus lugares na ecliptica, achados por obfervação, aos lugares correfpondentes das fuas orbitas, he indifpenfavel conhecer as inclinações das fuas orbitas á ecliptica, e os pontos da ecliptica, em que as fuas orbitas a cortão, chamão-fe *Nodos*. Mas primeiro moftraremos o methodo de reduzir os lugares dos planetas viftos da terra aos lugares viftos do Sol, e como fe contão as fuas latitudes heliocentricas.

419. Seja (fig. 42) E o lugar da terra, P o planeta, S o Sol, ♈ o primeiro ponto de *aries*, tire-fe P*v* perpendicular á ecliptica, e produza-fe E*s* para *a*. Calcule-fe para o tempo da obfervação, a longitude do Sol, vifto de *a*, e ter-fe-ha a longitude da terra em E, ou o angulo ♈ SE; calcule-fe tambem a longitude do planeta, ou o angulo ♈ S*v*, e a differença deftes dois angulos he o angulo de commutação ES*v*. Obferve-fe o lugar do planeta na ecliptica; e conhecido o lugar do Sol, temos o angulo

vES de *elongação* a reſpeito da longitude; por tanto conhecemos o angulo SvE, que mede a differença dos lugares dos planetas viſtos da terra e do Sol; logo, conhecido o lugar do planeta viſto da terra, ſe conhecerá o ſeu lugar viſto do Sol. Tambem

$$\textit{tang.}\ PEv : R :: vP : Ev$$
$$R : \textit{tang.}\ PSv :: vS : vP.$$

$\therefore$ $\textit{tang.}\ PEv : \textit{tang.}\ PSv :: vS : Ev :: \textit{ſen.}\ SEv : \textit{ſen.}\ ESv$; iſto he, *o ſeno de elongação em longitude : ſeno da differença das longitudes da terra e do planeta : tangente da latitude geocentrica : tangente da latitude heliocentrica.* Quando a latitude he pequena, $Sv : Ev$ he muito proximamente como $PS : PE$, que em oppoſição he muito proximamente como $PS : PS—SE$. Ou calcularemos os valores de PS e SE, o que podemos fazer com mais exacção do que calcular os angulos SEv e ESv. A diſtancia encurtada Sv do planeta ao Sol ſe póde achar, dizendo $R : \textit{cos.}\ PSv :: PS : Sv$.

420. Para determinar o lugar do nodo, procuremſe as latitudes heliocentricas dos planetas logo antes, e depois de paſſar pelo nodo, e ſejão v e q os lugares da orbita, w e u os lugares reduzidos á ecliptica; os triangulos vwN, quN (que podemos conſiderar como rectilineos) são ſimilhantes, e por tanto temos $vw : qu :: Nw : Nu$; donde, $vw+qu : vw : Nw+Nu$ $(uw) : Nw$, ou $vw+qu : uw :: vw : Nw$, iſto he, a *ſomma das duas latitudes : a differença de longitudes :: huma latitude : a diſtancia do nodo á longitude correſpondente a aquella latitude.* Ou ſe tomarmos as duas latitudes geocentricas, iſto ſerá muito proximamente tão exacto quando as obſervações forem feitas na oppoſição. Se a diſtancia das obſervações exceder a hum grão, eſta regra não ſerá ſufficientemente exacta, e neſte caſo devemos fazer o calculo pelos triangulos eſfericos da maneira ſeguinte.

Seja $uw = a$, $vw = \beta$, $qu = b$, $Nw = x$; ſerá

$\frac{sen.\,(a-x)}{tang.\,b} = cot.\,N = \frac{sen.\,x}{tang.\,\beta}$, ſendo o raio a unidade; mas $sen.\,(a-x) = sen.\,a\,cos.\,x - sen.\,x\,cos.\,a$, logo

$$\frac{sen.\,a \times cos.\,x - sen\,x\,cos.\,a}{tang.\,b} = \frac{sen.\,x}{tang.\,\beta};\text{ e }\ldots$$

$$\frac{sen.\,a\,tang.\,\beta}{tang.\,b + cos.\,a.\,tang.\,\beta} = \frac{sen.\,x}{cos.\,x} = tang.\,x.$$

421. *Exemplo*. *Bugge* obſervou a aſcenſão recta e declinação de Saturno, e dellas deduzio as ſeguintes longitudes e latitudes heliocentricas.

1784 *Tempo verdadeiro.*		Longit. Helioc.	Latit. Helioc.
Julho	12 ás 12h 3′ 1″	9s 20° 37′ 29″	0° 3′ 13″ N
	20 — 11 29 9	9 20 51 53	0 2 41
Agoſt.	1 — 10 38 25	9 21 13 17	0 1 34
	8 — 10 9 0	9 21 26 2	0 0 56
	21 — 9 14 59	9 21 49 27	0 0 2
	27 — 8 50 19	9 22 0 12	0 0 27 S
	31 — 8 33 47	9 22 7 32	0 0 50
Set,	5 — 9 13 45	9 22 16 28	0 1 21
	15 — 7 33 45	9 22 34 32	0 1 59
Out.	8 — 6 4 23	9 23 16 15	0 3 35

Pelas obſervações de 21 e 27 de Agoſto, conſiderando os triangulos como planos, $x = 44'',5$; pelas de 21 e 31, $x = 42'',5$; e pelos de 21 de Agoſto e 5 de Setembro, $x = 40''$; o meio he $x = 42''$. *Bugge* faz $x = 41''$, provavelmente por ſer o meio de hum maior numero; ou calculando-os como triangulos esfericos; por tanto o lugar heliocentrico do *Nodo* deſcendente era 9 ſignos 21°50′8″,5. Em 21 de Agoſto ás 9 horas 12′26″ tempo verdadeiro, a longitude heliocentrica deSaturno era 9 fignos 21°49'27'', e a 27 ás 8 horas 49'23'', tempo verdadeiro, era 9 fignos 22°0'12''; logo em 5 dias 23 horas 36'57''Saturno fe moveu 10'45'' em longitude; por tanto 10'45'' ; 41'' : : 5 dias 23 horas 36'57'' : 9 horas 7'44'', tempo em que defcreveu 41'' em longitude, que juntos a 21 de Agofto ás 9 horas 12'26'' dá 21 de Agofto ás 18 horas 20'10'', tempo em que Saturno eftava no feu nodo.

422. As longitudes dos nodos dos planetas no principio de 1750, são, Mercurio, 1 figno 15°20'43', Venus, 2 fignos 14°26'18''; Marte, 1 figno 17°38'38''; Jupiter, 3 fignos 7°55'32''; Saturno, 3 fignos 21°32' 22''; Herschell, 2 fignos 12°47'; Ceres, 2 fignos 21°5'46'' em 1802.

423. Para determinar a inclinação da orbita, temos *wv*, a latitude do planeta, e *w*N a fua diftancia ao nodo fobre a ecliptica; logo *fen.* *w*N : *tang.* *vw* : : R : *tang.* N. Mas as obfervações proximas do nodo não fe devem empregar para determinar a inclinação, porque hum erro muito pequeno na latitude fará hum erro confideravel no angulo. Se tomarmos a obfervação de 20 de Julho, ella dá o angulo 2°38'15'', fe tomarmos a de 8 de Outubro, ella dá o angulo 2°22'13''; o meio he 2°30'14'', inclinação da orbita á ecliptica, fegundo eftas obfervações. Tambem fe podem achar as inclinações da maneira feguinte.

424. Procure-fe o angulo PS*v* (fig, 42), então o lugar do planeta e o do feu nodo fendo dados, conhecemos *v*N; logo *fen.* *v*N : *tang.* P*v* : : R : *tang.*PN*v*, inclinação da orbita.

425. A 27 de Março de 1694 ás 7 horas 4'40'' em *Greenwich*, *Flamftead* determinou a afcensão recta de Marte 115°48'55'', e a fua declinação 24°10'50'' Norte; logo a longitude geocentrica era ♋23°26'12'', e a latitude 2°46'38''. Seja S o Sol, E a terra, P Marte, *v* o feu lugar reduzido á ecliptica. Ora, o verdadeiro lugar de Marte (pelo calculo) vifto do Sol era ♌28°44'14'', e o lugar do Sol era ♈7°34'25''; logo, fubtrahindo o lugar do Sol do lugar do plane-

ta vifto da terra, teremos o angulo vES entre o Sol e Marte $=105°51'47''$; e fendo o lugar da terra ♎ $7°35'25''$, tire-fe delle o lugar de Marte, e teremos o angulo $ESv=38°50'11''$; logo *fen.* $105°51'47''$: *fen.* $38°50'11''$: : *tang.* PEv ($=2°46'38''$) : *tang.* PSv ($=1°48'36''$). Ora o lugar do nodo era em ♉ $17°15'$, que fubtrahido de ♌ $28°44'14''$ dá $101°29'14''$ pela diftancia Nv de Marte ao feu nodo; logo *fen.* vN ($=101°29'14''$) : *tang.*Pv($=1°48'36''$) : : R : *tang.*PNv $=1°50'50''$, inclinação da orbita. *Bugge* faz a inclinação de $1°50'56'',56$ em Março de 1788, *Lallande* a fazia de $1°51'$ em 1780.

426. A inclinação das orbitas dos planetas são as feguintes:

Mercurio,	7°	0'	0''
Venus,	3	23	25
Marte,	1	51	0
Jupiter,	1	18	56
Saturno,	2	29	50
Herschell,	0	46	20
Ceres,	10	37	4.

427. O movimento dos nodos fe acha, comparando os feus lugares em dois differentes tempos; defte modo fe achou que o de Mercurio em 100 annos he $1°12'10''$; Venus $0°51'40''$; Marte $0°46'40''$; Jupiter $0°59'30''$; Saturno $0°55'30''$. Efte movimento he relativo ao equinocio.

428. *Herschell* ainda não eftá defcoberto ha baftante tempo para fe determinar pela obfervação o movimento dos feus nodos. *La Grange* determinou pela theoria o feu movimento annuo de $12'',5$. Mas fe tomarmos a denfidade de Venus, fegundo *Lallande*, elle ferá de $20''40'''$, que elle emprega nas fuas taboas.

429. Defte modo ficão determinados todos os elementos neceffarios para calcular o lugar de hum planeta na fua orbita em qualquer tempo; mas para facilitar a operação, que feria fummamente faftidiofa, fe tiveffemos fómente os elementos dados defta manei-

ra, os aſtronomos tem conſtruido taboas dos ſeus movimentos, por meio das quaes ſe podem mui facilmente calcular os ſeus lugares em qualquer tempo.

CAPITULO VI.

Das phaſes dos planetas, e particularmente da Lua.

430. Como a face dos planetas, que eſtá voltada para a terra, não he a meſma que eſtá da parte do Sol, excepto na conjunção e oppoſição alguma parte do diſco, que eſtá da parte da terra, não hade ficar allumiada.

431. Para traçar a apparencia, ou phaſe, de hum planeta em qualquer tempo, ſeja S o Sol (fig. 44) E a terra, V venus, por exemplo; *aUb* o plano de illuminação, perpendicular a SV, *lVd* o plano de viſão perpendicular a EV, e tire-ſe *av* perpendicular a *ld*, então *la* he a largura da parte viſivel allumiada, que he projectada pelo olho em *lv*; o *ſeno verſo* de *lva* ou SVZ, porque SV*l* he o complemento de cada hum. Ora, o circulo que termina a parte allumiada do planeta, ſendo viſto obliquamente, parece huma ellipſe; por tanto ſe *lmdn* repreſentar a projecção do hemisferio de Venus proximo á terra, *mn*, *ld* dois diametros perpendiculares entre ſi, e tomarmos *lv* = *ſeno verſo* de SVZ, e deſcrevermos a ellipſe, *lv* ſerá o eixo menor, e *mlvn* repreſentará a parte viſivel allumiada, qual apparece á terra, e pela propriedade da ellipſe, eſta área varía como *lv*. Logo a parte viſivel allumiada : o diſco inteiro : : ſeno verſo de SVZ : diametro.

432. Seja V a lua: então como EV he muito pequena em comparação de SV, ES, eſtas linhas ſerão muito proximamente parallelas, e o angulo SVZ muito proximamente igual a SEV; logo a parte viſivel allumiada da lua varía muito proximamente como o *ſeno verſo* da diſtancia angular da lua ao

Sol, quando he viſta da terra; angulo a que os aſtronomos chamão *elongação*.

433. Conſideremos particularmente as phaſes da lua. Depois de deſapparecer alguns dias, a lua começa a moſtrar-ſe á tarde da parte do Occidente, pouco depois do pôr do Sol, na fórma de hum filete de luz, á maneira de arco, e que ſe chama creſcente, porque na realidade creſce todos os dias. A ſua luz he fraca, porque he diminuida pela claridade do crepuſculo. As pontas do creſcente são levantadas, e voltadas para a parte oppoſta do Sol; iſto he, para o Oriente, ſe o Sol eſtá ao Occidente; em outro dia ella he mais forte, e dentro em 5 ou 6 dias toma a fórma de ſemi-circulo; então a parte luminoſa he terminada por huma linha recta, e ſe diz que a lua eſtá *dichotoma* (*a*), ou em quadratura; he o ſeu primeiro quarto.

Depois de haver apparecido na fórma de hum ſemi-circulo luminoſo, a lua continúa a affaſtar-ſe do Sol; faz-ſe huma eſpecie de oval, e augmenta em luz 7 ou 8 dias; então ella parece inteiramente circular; o ſeu diſco inteiro e luminoſo brilha toda a noite; e he o dia da lua cheia, ou da oppoſição; paſſa pelo meridiano á meia noite, e ſe põe quando naſce o Sol. Tudo annuncia então que ella eſtá directamente oppoſta ao Sol relativamente a nós, e brilha, porque o Sol a allumia de roſto, e não de lado.

Depois da lua cheia, vem o minguante, que dá as meſmas phaſes e as meſmas figuras, que havemos indicado, fallando do augmento da lua; elle he primeiro oval, depois *dichotoma*, ou na fórma de hum ſemi-circulo. Eſte o ultimo quarto.

Depois, diminue o ſemi-circulo de luz, e toma

(*a*) Διχοτομος, cortada em dois: διχα, duas vezes; τεμνω, cortar.

a fórma de hum crefcente, que he cada vez mais eftreito, e cujas pontas eftão fempre levantadas e da parte mais diftante do Sol; então a lua tem feito o giro do Ceo; nafce pela manhã hum pouco antes do Sol na mefma maneira, que no primeiro dia da obfervação: aproxima-fe ao Sol, e finalmente fome-fe nos feus raios; ifto fe chama lua nova, ou conjunção, antigamente *neomenia* (*a*).

434. Os eclipfes moftrão que a lua he hum corpo opaco, ou que não tem luz propria. Vejamos como ella parece luminofa.

435. Como o Sol allumia fempre metade do globo lunar, não podemos ver a lua cheia, fenão quando percebemos a metade allumiada toda inteira; fe eftivermos de lado, de maneira que não poffamos ver mais de metade da parte allumiada, ifto he, do hemisferio oppofto ao Sol, veremos fó metade do que viamos na lua cheia; quer dizer que veremos hum femi-circulo de luz, e a lua parecerá em quarto, e affim das mais eftações.

436. Seja S o Sol (fig. 45), T a terra em torno da qual gira a lua na fua orbita, EO o globo da lua pofto entre a terra, e o Sol, ifto he em conjunção, ou em lua nova; então fó a parte E he allumiada pelo Sol; ao contrario a parte O he a unica vifivel para nós em T; affim *o hemisferio allumiado* he juftamente o que não vemos, e o *hemisferio vifivel* he aquelle, que não he allumiado pelo Sol; tal he a caufa que faz então a lua invifivel para nós.

437. Pelo contrario, quando a lua eftá oppofta ao Sol, o hemisferio allumiado L he o que nós vemos, porque eftamos poftos da mefma parte que o faxo, que a allumia, e não perdemos coufa alguma da luz que a lua derrama, por iffo nos parece cheia; ifto he, redonda e luminofa, quando eftá em oppofição.

(*a*) Νεος, nova, Μηνη, Lua.

438. Quando a lua difta 90° do Sol, pouco mais ou menos, ifto he, quafi metade do caminho de O para L, ou da *conjunção* á *oppofição*, o hemisferio vifivel he AQZ, o hemisferio allumiado pelo Sol he MQZ; affim vemos fó a metade do hemisferio allumiado, que todo inteiro parecia hum circulo perfeito no tempo da oppofição; por tanto vemos fó hum femi-circulo de luz; como fe reprefenta em N, ficando a parte redonda e luminofa voltada para o Sol.

439. Quando a lua depois da conjunção eftá 45° diftante do Sol, dizemos que eftá no primeiro *oitavo*; então a parte allumiada, ou que olha para o Sol he CDF, a parte vifivel he BCD; affim percebemos fómente a parte CD do hemisferio allumiado; então a lua apparece na fórma de hum crefcente como fe vê em G; não vemos do Occidente para o Oriente mais de 8° da circumferencia do globo lunar; e a lua difta do Sol a 8.a parte de hum circulo, o que fez chamar a efta phafe oitavo, mas a fuperficie da parte allumiada, he hum pouco mais do que a fetima parte da fuperficie do difco vifivel.

No *fegundo oitavo*, que acontece depois do quarto, o hemisferio vifivel he HIK, o hemisferio allumiado pelo Sol he IKP; affim á noffa vifta falta fó a pequena porção IH para vermos toda a parte allumiada; veremos então mais de metade do difco lunar, e a lua terá a fórma R; o que falta ao feu circulo he igual á parte allumiada no primeiro oitavo, quando a lua eftá em C.

O terceiro oitavo V, que tem lugar 45° além da oppofição, he fimilhante ao fegundo, e o quarto X he fimilhante ao primeiro G.

440. Para calcular exactamente a porção luminofa e vifivel do difco lunar, feja S o Sol (fig. 46), T o centro da terra, C o da lua, AE o diametro da lua, perpendicular ao meio do Sol, e que fepara a parte allumiada ANE da parte efcura ADE, o diametro lunar ND, perpendicular ao raio vifual TC tirado da terra, fepara a parte vifivel DAN da parte

invisivel DEN ; abaixe-se do extremo A do semi-circulo luminoso ENA huma perpendicular AB sobre o diametro ND , e a linha NB será a largura apparente da parte visivel do hemisferio luminoso. Com effeito de todo o hemisferio luminoso ANE só a parte AN he comprehendida no hemisferio visivel DAN , e o arco AN não póde mostrar a nossos olhos mais da largura BN , pela mesma razão que o semi-circulo inteiro NAD parece hum circulo, ou hum plano, que he a sua projecção. A porção NB do diametro visivel NBCD he o *seno verso* do arco NA ; este arco, ou o angulo NCA, he igual ao angulo CTF, suppondo TF parallela a CS ; porque o angulo NCA he complemento do angulo FCT ; porque NCT he recto. Mas FCT he complemento do angulo FTC, porque o triangulo CTF he rectangulo ; logo o angulo NCA tem o mesmo numero de gráos que o angulo FTC. Este angulo he igual á *elongação da lua*, ou á distancia da lua ao Sol, porque suppõe-se o Sol na linha FT, assim como na linha CS, por causa da distancia immensa relativamente a CF ; logo NA he igual á elongação da lua ; logo nas differentes phases da lua, *o comprimento do segmento luminoso da lua he igual ao seno verso do angulo de elongação*, servindo de raio o mesmo do disco da lua, ou a semi-distancia das pontas do crescente. Por exemplo, quando a lua, 4 ou 5 dias depois da conjunção, está em 60° do Sol, a sua parte luminosa NB parece metade do raio NC, ou o quarto do diametro inteiro ND da lua.

CAPITULO VII.

Dos movimentos da Lua por obſervação e dos ſeus phenomenos.

441. A Lua he o planeta mais proximo á terra, e depois do Sol o mais notavel do noſſo ſyſtema, e util para a diviſão do tempo; por tanto não admira que os antigos aſtronomos tiveſſem tanto cuidado em deſcobrir os ſeus movimentos; e por felicidade as ſuas obſervações chegárão até nós, podendo-ſe deduzir dellas o ſeu movimento medio, mais exactamente do que ſó pelas obſervações modernas; e particularmente iſto deu azo a *Halley* para deſcobrir pelas obſervações de alguns eclipſes antigos huma acceleração no ſeu movimento medio. O movimento proprio da lua na ſua orbita em torno da terra he d'Oeſt para Eſt; e comparando o ſeu lugar com as eſtrellas fixas em huma revolução, ſe achou que ella deſcreve huma orbita inclinada á ecliptica; o ſeu movimento não he uniforme; a poſição da orbita e a linha dos ſeus apſides são ſujeitas a continua mudança.

Determinar o lugar dos nodos da lua.

442. O lugar dos nodos da lua póde-ſe determinar, como fica dito para os outros planetas, ou pelo methodo ſeguinte.

Em hum eclipſe *central* da lua, o lugar da lua no meio do eclipſe he directamente oppoſto ao Sol, e a lua eſtá neceſſariamente no nodo; por tanto calcule-ſe o verdadeiro lugar do Sol, ou (que he mais exacto) ache-ſe o ſeu lugar por obſervação, e o ponto oppoſto ſerá o verdadeiro lugar da lua, e por conſequencia o do ſeu nodo.

443. *Exemplo. Caſſini*, na ſua Aſtronomia, pag. 281, nos diz que a 16 de Abril de 1707 ſe obſer-

vou em Paris hum eclipfe central, o meio do qual fe determinou ás 13 horas 48′ de tempo verdadeiro. O verdadeiro lugar do Sol, calculado para aquella hora, era 0 fignos 26°19′17″; logo o lugar do nodo da lua era 6 fignos 26°19′17″. A lua paffava da latitude Norte para o Sul, e por tanto era o nodo defcendente.

444. Para determinar o movimento medio dos nodos, ache-fe o lugar dos nodos em differentes tempos, e ter-fe-ha o feu movimento no intervallo; e quanto maior for efte intervallo, mais exacto ferá o movimento medio. *Mayer* faz o movimento medio annuo dos nodos de 19°19′43″,1.

Da inclinação da orbita da lua á ecliptica.

445. Para determinar a inclinação da orbita, obferve-fe a afcensão recta e declinação da lua, quando eftá 90° dos feus nodos, e calcule-fe a fua latitude, que ferá a fua inclinação naquelle inftante. Repita-fe a obfervação em cada diftancia do Sol á terra, e em cada pofição do Sol refpectivamente aos nodos da lua, ter-fe-ha a inclinação naquelles tempos. Eftas obfervações moftrão que a inclinação da orbita á ecliptica he variavel, e que a menor inclinação he pouco mais ou menos de 5°, que tem lugar quando os nodos eftão em quadraturas, e a maior he perto de 5°18′, que fe obferva quando os nodos eftão nas fizigias. Achou-fe tambem que a inclinação depende da diftancia do Sol á terra.

Do movimento medio da lua.

446. Acha-fe o movimento medio da lua obfervando o feu lugar em dois differentes tempos, o que dá o movimento medio naquelle intervallo, fuppondo que a lua tinha a mefma fituação ácerca dos feus apfides em cada obfervação; e pelo contrario, fe houver hum muito grande intervallo de tempo, elle fe-

rá fufficientemente exacto. Para o determinar, comparamos os lugares da lua, primeiro em hum pequeno intervallo, a fim de termos proximamente o tempo medio de huma revolução, e depois em maior intervallo, para termos mais exactamente. O lugar da lua fe póde determinar directamente por obfervação, ou deduzir de hum eclipfe.

447. *Caffini* (Aftr. 294) obfervou, que a 9 de Setembro de 1718 eftava a lua eclipfada, e que o meio do eclipfe acontecia ás 8 horas 4′; quando o verdadeiro lugar do Sol era 5 fignos 16°40′. Comparou efte eclipfe com outro, do qual fe obfervou o meio ás 8 horas 32′ de 29 de Agofto de 1719, quando o lugar do Sol era 5 fignos 5° 47′. Nefte intervallo de 354 dias 28′ a lua fez 12 revoluções e mais 349° 7′; divide-fe pois 354 dias 28′ por 12 revoluções +349°7′, parte de huma revolução, e dá 27 dias 7 horas 6′ pelo tempo de huma revolução. Pelos dois eclipfes de 1699 e de 1717 fe achou 27 dias 7 horas 43′6″.

448. Obfervou a lua eclipfada em Paris a 20 de Setembro de 1717, fendo o meio do eclipfe ás 6 horas 2′. Ora *Ptolomeu* refere que fe obfervou hum eclipfe total da lua em *Babilonia* a 19 de Março do anno 720 antes de J. C., fendo o meio ás 9 horas 30′ naquelle lugar, o que dá 6 horas 48′ em Paris. O intervallo deftes tempos era 2437 annos (dos quaes 609 forão biffextos) 174 dias —46′; divide-fe ifto por 27 dias 7 horas 43′6″ e dá 32585 revoluções e hum pouco mais de ½. A differença dos dois lugares do Sol, e por confequencia da lua, nos tempos das obfervações, era 6 fignos 6°42′. Logo no intervallo de 2437 annos 174 dias —45′, a lua fez 32585 revoluções 6 fignos 6°12′, que dá 27 dias 7 horas 43′5″ para o tempo medio de huma revolução. Efta determinação he muito exacta, porque a lua em ambas as vezes eftava quafi na mefma diftancia do feu apfide. Por tanto o movimento medio diurno he 13°10′35″; e o movimento horario medio 32′56′ 27″′¼. *Lallande*

faz o movimento medio diurno $13^{\circ}10'35'',02784394$. Efte he o tempo medio de huma revolução relativamente aos equinocios. O lugar da lua no meio do eclipfe fe tomou pelo mefmo que o do Sol o que não he exacto em tão longo intervallo.

449. Como a precefsão dos equinocios he $50'',25$ em hum anno, ou perto de $4''$ em hum mez, a revolução media da lua a refpeito das eftrellas fixas, deve fer maior do que a refpeito do equinocio, o tempo que a lua gafta em defcrever $4''$ com o feu movimento medio, que he perto de $7''$. Logo o tempo de huma revolução fyderal da lua he 27 dias 7 horas $43'12''$.

450. Obferve-fe exactamente o lugar da lua em huma revolução inteira as mais vezes que for pofsivel, e comparando os movimentos verdadeiros com os medios, a maior differença ferá o dobro da equação. Se acharmos duas obfervações, onde for nulla a differença dos movimentos verdadeiro e medio, então a lua eftará no feu apogeo e perigeo. *Mayer* faz a excentricidade media 0,05503568, e a maxima equação correfpondente $6^{\circ}18'31'',6$. Nas fuas ultimas Taboas publicadas por *Mafon* debaixo da direcção de *Maskeline* ella he de $6^{\circ}18'32''$.

451. Para determinar o lugar do apogeo, pelas obfervações de *Caffini* temos a maxima equação $= 5^{\circ}1'44'',5$; logo $57^{\circ}17'44'',8 : 2^{\circ}30'52'',25 :: AC = 100000 : CS = 4388$ para a excentricidada da lua naquella occafião. Ora, feja v o foco, em que a terra eftá fituada; então fuppondo QSP a anomalia media, como QvP he a anomalia verdadeira, a fua differença SPv he a equação da orbita, que he $37'50'',5$; e porque $PS = Pr$, o angulo $vrS = 18'55'',25$; logo $vS = 8776 : vr = 200000 :: fen.\ vrS = 18'55'',25 : fen.\ vSr$, ou $QSr = 7^{\circ}12'20''$, do qual tirando $vrS = 18'55'',25$, teremos $QvP = 6^{\circ}53'25''$, diftancia da lua ao apogeo; ajuntando ifto a 2 fignos $19^{\circ}\ 40'$, lugar verdadeiro da lua, vem 2 fignos $26^{\circ}33'25''$ para lugar do apogeo a 10 de Dezembro de 1685 ás 10 ho-

ras 38'10'' tempo medio em Paris. Podemos confiderar efte tempo como huma *epoca* do lugar do apogeo.

Determinar o movimento medio do apogeo.

452. Ache-fe o feu lugar em differentes tempos, e compare-fe a differença dos lugares com o intervallo do tempo entre elles. Para ifto, devemos primeiro comparar obfervações em pequenas diftancias huma da outra para que não nos enganemos em huma revolução inteira; e então podemos compara-las em maior diftancia. O movimento medio annuo do apogeo em hum anno de 365 dias fe achou fer por efta maneira 40°59'50'', fegundo *Mayer*. *Horrox*, obfervando o diametro da lua, achou o apogeo fujeito a huma equação annual de 12°,5.

453. Examinado o movimento da lua para hum mez, fe percebeu immediatamente que elle era fujeito a huma irregularidade, que algumas vezes chegava a 5° ou 6°, mas que efta irregularidade defapparecia todos os 14 dias. E continuando as obfervações em differentes mezes, fe vio que os pontos, em que as defigualdades erão maiores, não erão fixos, mas fe adiantavão no Ceo quafi 3° em hum mez, de maneira que o movimento da lua a refpeito do feu apogeo era quafi $\frac{1}{120}$ menor do que o feu movimento abfoluto; ifto moftrava que o apogeo tinha hum movimento progreffivo. *Ptolomeu* determinou efta *primeira defigualdade*, ou equação da orbita, por tres eclipfes lunares, obfervados nos annos de 719 e 720 antes de J. C. em *Babilonia* pelos *Caldeos*: por meio delles conheceu que chegava a 5°1' no feu maximo. Porém depreffa percebeu que aquella defigualdade não fatisfazia a todas as irregularidades da lua. A diftancia da lua ao Sol, obfervada por *Hiparco*, e por elle mefmo, humas vezes concordava com efta defigualdade, outras não. Achou que quando os apfi-

des da orbita da lua eſtavão em quadratura, eſta primeira deſigualdade dava o lugar da lua muito bem; mas quando os apſides eſtavão nas ſyzigias, deſcobrio que havia outra deſigualdade de perto de $2^{\circ}\frac{2}{3}$, o que fazia a deſigualdade total de $7^{\circ}\frac{2}{3}$, pouco mais ou menos.

Eſta ſegunda deſigualdade ſe chama *Evecção*, e naſce de huma mudança de excentricidade da orbita da lua. *Ptolomeu* achou por eſte modo que a deſigualdade da lua variava de quaſi 5° a $7^{\circ}\frac{2}{3}$, e por tanto a quantidade media era $6^{\circ}20'$. *Mayer* a faz de $6^{\circ}18'31'',6$. He muito extraordinario que *Ptolomeu* podeſſe determinar iſto com tanta exactidão. Não entro na explicação das deſigualdades do movimento da lua, porque he alheia do meu objecto.

Tempos das revoluções da lua, do ſeu apogeo e nodos, determinados por Lallande.

Revolução tropica		27^{d}	7^{h}	$43'$	$4''$	,6795
Revolução ſyderal		27	7	43	11	,5259
Revolução ſynodica		29	12	44	2	,8283
Revolução anomaliſtica		27	13	18	33	,9499
Revolução relativa aos nodos		27	5	5	35	,603
Revoluç. tropica do apogeo	8a	311	8	34	57	,6177
Revoluç. ſyderal do apogeo	8	312	11	11	39	,4089
Revolução tropica do nodo	18	228	4	52	52	,0296
Revolução ſyderal do nodo	18	223	7	13	17	,744

Movimento diurno da lua a reſpeito dos equinoc.	$13^{\circ}\ 10'35'',02784394$
Movim. diurno do apogeo	6 41 ,069815195
Movim. diurno do nodo	3 10 ,6380603696

Os annos aqui ſão todos de 365^d.

Do diametro da lua.

454. O diametro da lua ſe póde medir com hum micrometro, quando ella eſtá cheia; ou póde ſer medido ao tempo da ſua paſſagem pelo fio vertical de hum óculo de paſſagens; mas iſto deve ſer quando a lua paſſa huma ou duas horas de cheia, antes que o diſco viſivel deſira ſenſivelmente de hum circulo. Para achar o diametro no tempo da ſua paſſagem pelo meridiano, ſeja $d'' =$ ao diametro horizontal da lua, $c = ſec.$ da ſua declinação, e $m =$ o comprimento de hum dia lunar, ou o tempo deſde a paſſagem da lua pelo meridiano no dia, em que calculamos, até a paſſagem pelo meridiano no dia ſeguinte. Então cd'' he o diametro da lua em aſcenſão recta; logo $360^o : cd'' :: m :$ o tempo (t) da paſſagem pelo meridiano; logo $d'' = 360^o \times \frac{t}{cm}$. Se obſervarmos quando o limbo da lua chega ao meridiano, poderemos achar o tempo em que o centro chega a elle, ajuntando ou ſubtrahindo do tempo, em que o primeiro, ou o ſegundo limbo, chega ao meridiano, metade do tempo da paſſagem da lua pelo meridiano. O tempo em que o ſemidiametro da lua paſſa pelo meridiano, ſe póde achar por duas taboas das que dão o movimento da lua.

455. *Albategnio* faz o diametro da lua variavel de 29′30″ a 35′20″, e por tanto o medio he 32′25″. *Copernico* o achou de 27′34″ a 35′38″, e por tanto o medio he 31′36″. *Kepler* faz o diametro medio 31′22″. *La Hire* de 31′30″. *Caſſini* o ſuppõe oſcillar de 29′30″ a 33′38″. *Lallande* achou, por ſuas obſervações, o diametro medio 31′26″; os extremos de 29′22″, quando a lua eſtá no apogeo e em conjunção, e 33′31″, quando eſtá no perigeo e em op-

posição. O diametro medio ahi tomado he o meio arithmetico entre o maior e o menor diametro, sendo o diametro na distancia media 31′7″.

456. Quando a lua está em differentes alturas acima do horizonte, está em differentes distancias do observador, e por tanto ha huma mudança no diametro apparente. Seja C (fig. 48) o centro da terra, A o lugar do observador sobre a sua superficie, Z o seu zenith, L a lua; então, *sen.* CAL, ou ZAL : *sen.* ZCL :: CL : AL $= \frac{CL \times sen.\ ZCL}{sen.\ ZAL}$; mas o diametro apparente está na razão inversa da sua distancia; logo o diametro apparente varía como $\frac{sen.\ ZAL}{sen.\ ZCL}$, suppondo CL constante. Ora, no horizonte, $\frac{sen.\ ZAL}{sen.\ ZCL}$ se póde considerar como igual á unidade; logo 1 : $\frac{sen.\ ZAL}{sen.\ ZCL}$, ou *sen.* ZCL : *sen.* ZAL, ou *cos. alt. verd.* (a) : *cos. alt. ap.* (A) :: o diametro horizontal : diametro na altura apparente (A). Logo o *diametro horizontal : o seu augmento* :: *cos. a* : *cos.* A — *cos. a* $= 2$ *sen.* $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}A) \times$ *sen.* $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}A)$; logo o augmento do semidiametro = semidiametro horizontal $\times$ $\frac{sen.\ (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}A) \times sen.\ (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}A)}{cos.\ a}$; por esta fórmula se póde facilmente construir huma taboa do augmento do semidiametro para hum semidiametro horizontal qualquer; e para outro semidiametro horizontal qualquer, o augmento variará na mesma proporção.

CAPITULO VIII.

Dos ſatellites de Jupiter.

457. DAmos o nome de *ſatellites*, ou planetas ſecundarios, aos que girão em torno dos planetas primarios.

458. Como os ſatellites de Jupiter nos intereſsão muito pela facilidade, com que por meio delles podemos determinar as longitudes dos lugares da terra, exporemos neſte Capitulo quanto baſte para fazermos conhecer os ſeus movimentos.

459. Eſtes ſatellites forão deſcobertos por *Galileo* a 8 de Janeiro de 1610. Eſte celebre aſtronomo lhe deu o nome de *Medicea Sydera*, *Eſtrellas de Medici*, em obſequio á familia dos *Medici*, ſeus protectores.

460. Os ſatellites de Jupiter, quando paſsão d'Oeſt para Eſt, são eclipſados pela ſombra de Jupiter, e quando vem d'Eſt para Oeſt ſe obſervou que paſsão ſobre o ſeu diſco; logo elles girão em torno de Jupiter, e na meſma direcção, em que Jupiter ſe move em torno do Sol. Os tres primeiros ſatellites eſtão ſempre eclipſados, quando eſtão em oppoſição com o Sol; e ſe achou que os comprimentos dos eclipſes são differentes em differentes tempos; porém o quarto ſatellite paſſa alguma vez pela oppoſição ſem ſer eclipſado. O que moſtra que os planos das orbitas dos ſatellites não coincidem com o plano da orbita de Jupiter; porque em tal caſo, paſſarião ſempre pelo centro da ſombra de Jupiter, e eſtarião eclipſados o meſmo tempo, ou muito proximamente, em cada oppoſição do Sol. Como os planos das orbitas, que elles deſcrevem, paſsão algumas vezes pelo olho, elles parecerão deſcrever linhas rectas, que paſsão pelo centro de Jupiter; mas em todas as mais, elles deſcrevem ellipſes, das quaes Jupiter he o centro.

Dos tempos periodicos, e distancias dos satellites de Jupiter.

461. Para conhecermos os tempos medios das suas revoluções *synodicas*, ou das suas revoluções relativamente ao Sol, observaremos, quando Jupiter está em opposição, a passagem do satellite sobre o corpo de Jupiter, e este será o tempo da conjunção com o Sol. Depois de hum intervallo consideravel de tempo, repetiremos a mesma observação, quando Jupiter estiver em opposição, e dividiremos o intervallo de tempo pelo numero de conjunções com o Sol naquelle intervallo, e teremos o tempo de huma revolução *synodica* do satellite. Esta he a revolução, que mais nos importa considerar, porque della dependem os eclipses. Mas, pelo que pertence á equação da orbita de Jupiter, ella não dará o tempo *medio* de huma revolução synodica, sem que Jupiter esteja no mesmo ponto da sua orbita em ambas as observações; se assim não fosse, procederiamos desta maneira.

462. Seja AIPR (fig. 49) a orbita de Jupiter, S o Sol em hum fóco, e F o outro fóco; e como a excentricidade da orbita he pequena, o movimento em torno de F se póde considerar como uniforme. Esteja Jupiter no seu aphelio em A em opposição á terra em T; e L hum satellite em conjunção; e seja I o lugar de Jupiter, e a sua seguinte opposição com a terra em D, e o satellite em conjunção em G. Então, se o satellite houvesse estado em O, haveria estado em conjunção com F, ou em conjunção media; por tanto descreveria o angulo FIS antes de chegar á conjunção media, e este angulo he a equação da orbita, segundo a hypothese elliptica simples, que póde aqui ter lugar, porque a excentricidade da orbita he pequena; por tanto o angulo FIS mede a differença entre as revoluções medias synodicas relativamente a F, e as revoluções synodicas relativamente ao Sol S. Pelo que, se for *n* o nume-

ro de revoluções, que o ſatellite houver feito relativamente ao Sol, $n \times 360^o$—SIF $=$ as revoluções relativamente a F; logo $n \times 360^o$—SIF : 360^o : o tempo entre as duas oppoſições : o tempo de huma revolução media ſynodica em torno do Sol.

463. Como o ſatellite eſtá em O em conjunção media, e em Q, quando eſtá em conjunção com o Sol, he claro que ſe o angulo FIS for conſtante, o tempo de huma revolução relativamente a S, ſerá igual ao tempo a reſpeito de F, ou ao tempo de huma revolução media ſynodica; logo a differença entre os tempos de quaeſquer duas revoluções ſucceſſivas, relativamente a S e F, he como a variação do angulo FIS, ou variação da equação da orbita. Quando Jupiter eſtá em A, a equação ſe deſvanece, e os tempos das duas conjunções em F e S coincidem. Quando Jupiter chega a I, a conjunção media em O acontece depois da conjunção verdadeira em G, o tempo em que deſcreve o angulo SIF, equação da orbita de Jupiter. A iſto chamão os aſtronomos *primeira* deſigualdade; e os tempos dos eclipſes dos ſatellites são affectos deſta deſigualdade de intervallos dos tempos das conjunções verdadeiras.

464. Mas como a conjunção de hum ſatellite muitas vezes não acontece exactamente no tempo, em que Jupiter eſtá em oppoſição, póde-ſe achar o tempo de huma revolução media, quando elle eſtá fóra da oppoſição da maneira ſeguinte. Seja H a terra, quando o ſatellite eſtá em Z, em conjunção com Jupiter em R; e ſeja V outra poſição da terra, quando o ſatellite eſtá em C em conjunção com Jupiter em I; e produza-ſe RH,IV, até ſe encontrarem em M; então o movimento de Jupiter em torno da terra, neſte intervallo, he o meſmo que ſe a terra eſtiveſſe fixa em M. Ora, a differença entre os movimentos verdadeiro e medio de Jupiter he RFI—RMI $=$ FIM $+$ FRM, que moſtra quanto o numero de revoluções medias, relativamente a F, excede o meſmo numero de revoluções apparentes relativamente á ter-

ra ; logo $n \times 360^\circ - FIM - FRM : 360^\circ$ :: o tempo entre as obfervações : tempo de huma revolução fynodica media do fatellite. Se C e Z ficarem do outro lado de O e Y, os angulos FIM, FRM, fe devem ajuntar a $n \times 360^\circ$; e fe ficar hum de hum lado e o outro d'outro, fe deve ajuntar hum, e fubtrahir o outro, conforme as circunftancias.

465. Como o grande refplendor de Jupiter difficulta determinar exactamente o tempo, em que o fatellite eftá em conjunção com o centro de Jupiter, quando paffa pelo feu difco, fe determina o tempo da conjunção obfervando a fua entrada no difco, e e a fua fahida delle, mas como ifto não fe póde determinar com tanta exactidão, como a hora da *immersão* na fombra de Jupiter, e *emersão* della, determina-fe mais exactamente pelos eclipfes o tempo da conjunção.

466. Seja I (fig. 50) o centro da fombra de Jupiter FG, N*mt* a orbita de hum fatellite, N o nodo da orbita do fatellite fobre a orbita de Jupiter ; tire-fe I*v* perpendicular a IN, e I*c* a N*t* ; e quando o fatellite chega a *v*, eftá em conjunção com o Sol. Ora a immersão em *m*, e a emersão em *t* do fegundo, terceiro e quarto fatellites, fe podem obfervar algumas vezes ; e o tempo medio entre ellas dá o tempo do meio do eclipfe em *c* ; e calculando *cv*, conhecido o angulo N e NI, temos o tempo da conjunção em *v*. Se não fe puder obfervar a immersão, e a emersão, tome-fe o tempo de huma dellas, e depois de longo intervallo de tempo, quando acontecer hum eclipfe o mais perto poffivel da mefma fituação relativamente ao nodo, tome-fe o tempo do mefmo phenomeno, e pelo intervallo daquelles tempos ter-fe-ha o tempo de huma revolução. Por eftes differentes methodos, *Caffini* achou que os tempos das revoluções medias fynodicas dos quatro fatellites são os feguintes.

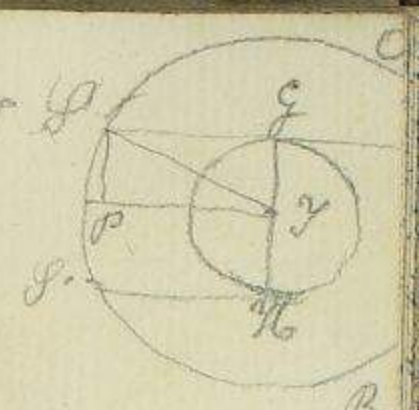
Primeiro.	*Segundo.*	*Terceiro.*	*Quarto.*
d h 1 18 28′36″	d h 3 13 17′54″	d h 7 3 59′36″	d h 16 18 5′ 7″

Isto mostra que 247 revoluções do primeiro satellite gastão 437 dias 3 horas 44′; 123 revoluções do segundo 437 dias 3 horas 41′; 61 revoluções do terceiro 437 dias 3 horas 35′; e 26 do quarto 435 dias 14 horas 13′. Por tanto depois do intervallo de 437 dias, os tres primeiros satellites voltão ás suas situações relativas dentro em 9 minutos.

467. Quando os satellites voltão á sua conjunção media, descrevem huma revolução nas suas orbitas, juntamente com o angulo medio a° descrito por Jupiter naquelle tempo; por tanto, para termos o tempo *periodico* de cada hum, diremos $360^\circ + a^\circ : 360^\circ ::$ tempo de huma revolução synodica : tempo de huma revolução periodica; logo os tempos periodicos são;

Primeiro.	*Segundo.*	*Terceiro.*	*Quarto.*
d h 1 18 27′33″	d h 3 13 13′42″	d h 7 3 42′33″	d h 16 16 32′8″

468. As distancias dos satellites ao centro de Jupiter se póde achar no tempo das suas maiores elongações, medindo com hum micrometro as suas distancias ao centro de Jupiter, e tambem o diametro de Jupiter, e por este meio ter-se-hão as suas distancias em função do diametro. Outro methodo he o seguinte. Quando hum satellite passa pelo meio do



disco de Jupiter, observa-se todo o tempo da sua passagem, e então, o tempo de huma revolução : tempo da sua passagem sobre o disco ∷ 360° : o arco da sua orbita correspondente ao tempo da sua passagem pelo disco ; logo o seno de metade daquelle arco : raio ∷ o semidiametro de Jupiter : distancia do satellite. Deste modo *Cassini* determinou que as suas distancias em partes do diametro de Jupiter erão, do *primeiro*, 5,67 ; *do segundo*, 9 ; *do terceiro*, 14,38 ; *do quarto* 25,3.

469. Ora, havendo determinado os tempos periodicos, e a distancia de hum satellite, se podem achar as distancias de outro, porque os quadrados dos tempos periodicos estão como os cubos das suas distancias. *Pound* (actual astronomo real de Inglaterra) com hum telescopio de 15 pés, achou na distancia media de Jupiter á terra, que a maxima distancia do quarto satellite era 8'16'' ; e com hum telescopio de 123 pés, achou a maior distancia do terceiro 4'42'' ; logo a maior distancia do *segundo* deve ser 2'56''47''', e do *primeiro* 1'15''6'''. Ora, *Newton* determinou o diametro de Jupiter na sua distancia media de 37''$\frac{1}{4}$; logo as distancias dos satellites, em partes do semidiametro de Jupiter são 5,965 ; 9,494 ; 15,141 ; e 26,63.

470. Por tanto, conhecendo as maiores elongações dos satellites em minutos e segundos, teremos as suas distancias ao centro de Jupiter, comparadas com a distancia media de Jupiter á terra, pela proporção, o seno da maior elongação do satellite : o raio ∷ a distancia do satellite a Jupiter : distancia media de Jupiter á terra.

Dos eclipses dos satellites de Jupiter.

471. Seja S o Sol (fig. 51), EF a orbita da terra, I Jupiter, *abc* a orbita de hum dos seus satellites. Quando a terra está em E antes da opposição de Jupiter, o observador vê a immersão em *a*, mas

ſe for o primeiro ſatellite, que eſtá muito proximo a Jupiter, a emersão nunca ſerá viſivel, porque o ſatellite ſempre eſtá atraz do corpo de Jupiter; os outros tres ſatellites tem as ſuas immersões viſiveis; mas iſto depende da poſição da terra. Quando a terra chega a F depois da oppoſição, então póde-ſe ver a emersão do primeiro, mas nunca a immersão; e dos outros tres são viſiveis as immersões e emersões. Tire-ſe EIr; então Ir, diſtancia do centro da ſombra ao centro de Jupiter, referida á orbita do ſatellite, he medida em Jupiter por sr, ou pelo angulo sIr, ou EIS. O ſatellite póde occultar-ſe atraz do planeta em r, e não eſtar eclipſado, o que ſe chama *occultação*. Quando a terra eſtá em E, a conjunção do ſatellite acontece *mais tarde* na terra do que no Sol, e quando a terra eſtá em F, he mais cedo.

472. O diametro da ſombra de Jupiter, em diſtancia de qualquer dos ſatellites, ſe acha mais facilmente, obſervando o tempo de hum eclipſe quando eſte acontecer no nodo, no qual tempo o ſatellite paſſa pelo centro da ſombra; porque o tempo de huma revolução ſynodica: o tempo que o ſatellite gaſta em paſſar pelo centro da ſombra : : 360° : o diametro da ſombra em gráos. Porém não ſe podem ver as immersões e emersões do primeiro e ſegundo ſatellites, quando eſtão nos nodos. Pelo que os Aſtronomos comparão as immersões alguns dias *antes* da oppoſição de Jupiter com as emersões alguns dias *depois*, e ſabendo quantas revoluções ſynodicas tem havido, conſeguem o tempo da paſſagem pela ſombra, e daqui concluem os gráos correſpondentes. Mas os tempos das paſſagens pelo centro varião em razão da excentricidade de algumas das orbitas, por exemplo, o ſegundo ſatellite ſe acha algumas vezes gaſtar 2 horas 50′ em paſſar pelo centro da ſombra, e outras 2 horas 54′; o que indica huma excentricidade.

473. A deſigualdade da duração dos eclipſes moſtra que as orbitas são inclinadas á de Jupiter; o quarto ſatellite paſſa algumas vezes pela oppoſição

ſem haver eclipſe. A duração dos eclipſes depende da ſituação dos nodos relativamente ao Sol, bem como nos eclipſes da lua; quando a linha dos nodos paſſa pelo Sol, o ſatellite paſſa pelo centro da ſombra; mas como Jupiter gira em torno do Sol, a linha dos nodos ſerá levada fóra da conjunção com o Sol, e o tempo do eclipſe ſe encurtará, porque então o ſatellite, em vez de deſcrever o diametro da ſecção da ſombra, deſcreve huma corda.

Da rotação dos ſatellites de Jupiter.

474. *Caſſini*, obſervando que os ſatellites, na ſua paſſagem pelo diſco de Jupiter, humas vezes erão viſiveis, e outras não, ſuſpeitou que elles tinhão huma rotação em torno dos ſeus eixos: conjecturou portanto que tinhão manchas de huma parte, e não da outra, e que erão viſiveis na ſua paſſagem, quando as manchas eſtavão voltadas para a terra. Além diſto elles parecem de differentes grandezas e eſplendor em differentes tempos. Em geral, o quarto parece o mais pequeno, mas algumas vezes o maior; e o diametro da ſua ſombra ſobre Jupiter algumas vezes parece maior do que o ſatellite. O terceiro tambem moſtra grandeza variavel, e o meſmo ſe obſerva nos outros dois. *Pound* obſervou tambem que humas vezes são mais luminoſos do que outras, e concluio dahi que girão em torno dos ſeus eixos. *Herschel* deſcobrio que todos elles girão em torno dos ſeus eixos nos tempos, em que reſpectivamente girão á roda de Jupiter.

LIVRO IV.

CAPITULO I.

Dos eclipses do Sol e da Lua.

475. OS eclipses da lua acontecem, quando ella entra na sombra da terra, e por consequencia só ha eclipse quando a lua está em opposição ao Sol, ou na lua cheia. A interposição da lua entre a terra e o Sol causa o eclipse do Sol, e por tanto acontece quando a lua está em conjunção com o Sol, ou na lua nova. Se o plano da orbita da lua coincidisse com o da ecliptica, haveria hum eclipse em cada opposição, e conjunção, mas sendo o plano da orbita da lua inclinado á ecliptica, não póde haver eclipse na opposição, ou na conjunção, sem que a lua esteja em hum dos nodos, ou perto delle. Porque supponhamos (fig. 52) que MM'*mm'* seja a orbita da lua, e que o outro circulo represente o plano da orbita da terra, ou o plano, em que o Sol S he visto da terra E, e sejão estes dois planos inclinados entre si, de maneira que possamos imaginar a parte MM'*m* acima, e a parte *mm* M abaixo do plano da orbita da terra, e M e *m* sejão os nodos. Ora se a lua estiver em M, em conjunção, então os tres corpos estão no mesmo plano, e por tanto a lua está entre a terra e o Sol, e causa hum eclipse do Sol. Mas se a lua estiver em M', quando o Sol chegar á conjunção em

S', M' eſtá agora levantado acima da linha, que ajunta E e S', e M' póde eſtar tão longe de M, que a elevação de M' acima da linha ES' ſeja tal que a lua não fique entre E e S', e neſte caſo não haverá eclipſe do Sol. Por tanto a diſtancia da lua ao nodo he que determina ſe hade haver eclipſe do Sol na conjunção, ou não. Se a lua eſtiver em *m* no tempo da oppoſição, eſtando então os tres córpos na meſma linha recta, a ſombra EV da lerra cahe ſobre a lua, e eſta ſoffre hum eclipſe. Mas ſe a lua eſtiver em *m* ao tempo da oppoſição, *m'* póde eſtar tão longe da ſombra E*v* da terra, que a lua não paſſe por ella; e neſte caſo não haverá eclipſe. Pelo que da diſtancia da lua ao nodo depende haver, ou não, eclipſe da lua, no tempo da oppoſição. Se os dois planos coincidiſſem, haveria evidentemente huma interpoſição central em cada conjunção e oppoſição, e por conſequencia hum eclipſe total. *Meton*, que viveu 430 annos antes de Chriſto, obſervou que depois de 19 annos, os plenilunios, e novilunios acontecião no meſmo dia do mez. Os antigos aſtronomos moſtrárão tambem que no fim de 18 annos e 10 dias, periodo de 223 lunações, voltavão os meſmos eclipſes; e por eſte conhecimento prediziāo quando elles devião acontecer. Aſſim o referem *Plinio* Naturaliſta L. 2. C. 13., e *Ptolomeu* L. 4. C. 2. Eſta repetição de eclipſes depende de voltarem ao meſmo eſtado os ſeguintes elementos. 1°. O lugar do Sol. 2°. O lugar da lua. 3°. O lugar do apogeo da lua. 4°. O lugar do nodo aſcendente da lua. He verdade que a exacta coincidencia deſtes elementos nunca póde ter lugar; mas ella acontece tão aproximadamente no tempo mencionado, que produzem eclipſes notavelmente correſpondentes. Deſta maneira *Halley* prediſſe, e publicou huma repetição dos eclipſes de 1700 a 1718, alguns delles correctos pelas obſervações, e juntamente os ſeguintes elementos. 1°. O tempo verdadeiro do meio. 2°. A anomalia do Sol. 8°. O argumento annuo. 4°. A latitude da lua. Elle diz que no periodo de 223 lunações ha 18 annos 10 dias ou 11 (conforme ha 4 ou 5 bisſextos) 7 horas 43′ $\frac{1}{4}$; que ſe accreſcentarmos eſte tempo ao meio de hum eclipſe obſervado, teremos a volta do correſpondente, certamente dentro de 1 hora 30′; e que com o ſoccorro de poucas equações, podemos achar ſeries ſimilhantes para muitos periodos.

CAPITULO II.

Explicação dos principios do calculo de hum eclipſe da lua.

476. A Primeira couſa que ſe deve fazer, he achar o tempo da oppoſição media (*a*). Para iſto he neceſſario primeiro dizer o que entendemos por *epaƈta.* A idade da lua no principio do anno, depois da ultima conjunção *media*, iſto he, deſde a ultima vez, em que as longitudes medias do Sol e da lua forão iguaes, ſe chama *Epaƈta para o anno*, ou ſimplesmente Epaƈta. A do mez he a idade, que a lua teria no principio do mez, ſe foſſe nulla no principio do anno; por tanto, ſe ajuntarmos á epaƈta do anno a do mez, a ſoma tirada de 29 dias 12 horas 44′3″, ou do dobro deſta quantidade, ſe a ſoma for maior que ella, dará o tempo da conjunção media. Se o anno for biſſexto, em Janeiro, ou Fevereiro, tire-ſe hum dia da ſoma das Epaƈtas, antes de fazer a ſubtracção. Quando o dia da conjunção media he 0, iſto denota o ultimo dia do mez precedente.

(*a*) Tempo da oppoſição media he aquelle, em que a oppoſição teria lugar, ſe os movimentos dos planetas foſſem uniformes.

477. *Exemplo.* Achar os tempos da lua nova, e cheia medias em Fevereiro de 1795.

	d	h		
Epacta em 1795 - -	9	11	6′	17″
Fevereiro - - - -	1	11	15	57
Soma - - -	10	22	22	14
	29	12	44	3
Lua nova media -	18	14	21	49
	14	18	22	1,5
Lua cheia media -	3	19	59	47,5.

478. Para determinar ſe hade haver eclipſe na oppoſição, procure-ſe a longitude media da terra no tempo da oppoſição media, e tambem a longitude do nodo da lua; então, conforme *Caſſini*, ſe a differença entre a longitude media da terra, e do nodo da lua for menor do que 7° 30′, haverá hum eclipſe; ſe for maior do que 14° 30′ não haverá eclipſe; mas entre 7° 30′ e 14° 30′ póde haver ou não haver eclipſe. Mr. *Delambre* faz eſtes limites 7° 47′ e 13° 21′.

479. *Exemplo.* Pergunta-ſe ſe haverá eclipſe na lua cheia de Fevereiro de 1795.

Longitude media do Sol ás

d h	s				
3 19 59′ 47″,5 - - -	10	13°	27′	20″	,8
Longitude media da terra -	4	13	27	20	,8
Longitude do nodo da Lua -	4	8	1	48	,5
Differença - - - - -	0	5	25	32	,3

Tomando o sup [illegible]
ao do [illegible]

Hade haver eclipse.

480. Deste modo examinaremos todas as luas novas e cheias de hum mez antes e hum depois do tempo, em que o Sol chega ao lugar dos nodos da orbita lunar, e estaremos seguros de não omittir eclipses. Ora, tendo os eclipses dos ultimos 18 annos, se ajuntarmos ao tempo do meio dos eclipses 18 annos 10 dias 7 horas 43′ $\frac{1}{4}$: ou 18 annos 11 dias 7 horas 43′ $\frac{1}{4}$ ter-se-ha o tempo, em que o eclipse hade tornar.

481. Para o tempo da opposição media, calculem-se as verdadeiras longitudes do Sol e da lua, e a verdadeira latitude da lua, e procurem-se pelas taboas dos seus movimentos da lua os movimentos horarios do Sol e da lua em longitude, e a differença (d) dos seus movimentos horarios he o movimento horario relativo da lua a respeito do Sol, ou o movimento com que a lua se approxima, ou affasta do Sol: procurem-se tambem os movimentos horarios da lua em latitude; e supponha-se, á aquelle tempo (t) da opposição *media*, que a lua está na distancia m da opposição; então, como podemos suppôr que a lua se approxima, ou affasta do Sol, uniformemente, $d : m :: 1$ hora : o tempo (w) entre t e a opposição, que somado ou tirado do tempo t, segundo a lua não houver ainda chegado á opposição, ou houver já passado, dá o tempo da opposição ecliptica.

482. Para achar o lugar da lua em opposição, seja n o movimento horario da lua em longitude; então, 1 hora : $w :: n$: o augmento da longitude da lua no tempo w, que applicado á longitude da lua no tempo da applicação media, dá a longitude verdadeira da lua no tempo da opposição ecliptica. O ponto opposto a este será a verdadeira longitude do Sol. Procure-se tambem a verdadeira latitude da lua no tempo da opposição, dizendo, 1 hora : $w ::$ movimento horario em latitude : movimento em latitude no tempo, w, que applicado á latitude da lua no

tempo da oppoſição media, dá a verdadeira latitude no tempo da verdadeira oppoſição (*a*).

Semelhantemente podemos calcular o tempo verdadeiro da conjunção ecliptica, e os lugares do Sol e da lua para aquelle tempo, quando calcularmos hum eclipſe do Sol.

483. Com o movimento horario do Sol em longitude, e da lua em longitude e latitude, ſe acha a inclinação da orbita *relativa*, e o movimento horario ſobre ella. Para iſto, ſeja LM (fig. 53) o movimento horario da lua em longitude, SM o movimento horario da lua em latitude; tome-ſe $Sb = Ma$, e parallela a ella; e tirem-ſe La, Lb; então La he a *verdadeira* orbita da lua, e Lb a ſua orbita *relativa* ácerca do Sol. Logo, LS (differença dos movimentos horarios em longitude): Sb (movimento horario da lua em latitude) : : raio : *tang.* bLS, inclinação da orbita relativa; e *cos.* bLS : raio : : LS : Lb, movimento horario na orbita *relativa*.

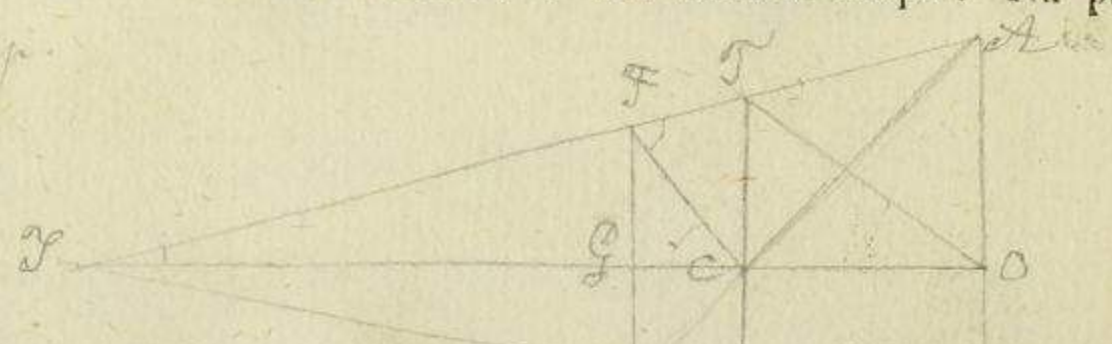
484. Para o tempo da oppoſição: calcule-ſe pelas taboas a parallaxe horizontal da lua, o ſeu ſemidiametro, e o ſemidiametro do Sol, cuja parallaxe horizontal ſuppozemos $= 9''$.

(*a*) Para maior certeza calculem-ſe outra vez pelas taboas, os lugares do Sol e da lua, e ſe não eſtiverem exactamente em oppoſição, o que provavelmente não acontecerá, porque a longitude da lua não augmenta uniformemente, repita-ſe a operação. Todavia nos eclipſes he geralmente deſneceſſaria eſta exacção; porque as melhores taboas lunares não podem dar a longitude da lua mais approximadamente do que $30''$; por tanto o erro provavel das taboas he muito maior do que o que provém de não ſer uniforme o movimento em longitude. Por tanto eſta operação he deſneceſſaria, ſalvo quando ſe preciſar muito grande exactidão.

485. *Achar o semidiametro da sombra da terra na lua, visto da terra.* Seja AB (fig.54) o diametro do Sol, TR o diametro da terra, O e C os seus centros; prolongue-se AT, BR até se encontrarem em I, e tire-se OCI; seja FGH o diametro da sombra da terra na distancia da lua, e tire-se OT, CF. Ora o angulo $FCG = CFA - CIA$, mas $CIA = OTA - TOC$; logo $FCG = CFA - OTA + TOC$; isto he, *o angulo debaixo do qual se vê na lua o semidiametro da sombra da terra he igual á soma das parallaxes horizontaes do Sol e da lua diminuida do semidiametro apparente do Sol.* Nos eclipses da lua se acha a sombra hum pouco maior do que dá esta regra, por causa da atmosfera da terra. Este augmento do semidiametro he, segundo *Cassini*, $20''$: segundo *Monnier*, $30''$, e segundo *La Hire* $60''$. *Mayer* pensa que a correcção he perto de $\frac{1}{60}$ do semidiametro da sombra, ou que se devem accrescentar tantos segundos, quantos minutos contém o semidiametro. Alguns calculadores accrescentão sempre $50''$; mas isto he sujeito a alguma incerteza.

486. Como o angulo CIT ($= OTA - TOC$) he conhecido, temos *sen.* TIC : *cos.* TIC :: TC : CI, comprimento da sombra da terra. Se tomarmos o angulo $ATO = 16'3''$ semidiametro medio do Sol, $TOC = 9''$ parallaxe horizontal do Sol, teremos $CIT = 15'54''$; logo *sen.* $15'54''$: *cos.* $15'54''$, ou $1 : 216,2 :: TC : CI = 216,2\ TC$.

487. Para explicarmos os differentes eclipses da lua, que podem acontecer, represente CL (fig.55) o plano da ecliptica, OR a orbita da lua, que corta a ecliptica no nodo N; e represente SH huma secção da sombra da terra, e M a lua no tempo, em que passa mais perto do centro da sombra da terra. Por tanto, se a opposição acontecer na oposição I, he claro que a lua ha de passar pela sombra da terra sem entrar nella, e não haverá eclipse. Na posição II



parte da lua paſſará pela ſombra da terra, e haverá eclipſe *parcial.* Na poſição III, toda a lua paſſa pela ſombra da terra, e ha eclipſe *total.* Na poſição IV, o centro da lua paſſa pelo centro da ſombra da terra, e ha eclipſe *total* e *central.* He claro, pois, que haver ou não eclipſe no tempo da oppoſição, depende da diſtancia da lua ao nodo naquella occaſião; ou da diſtancia da ſombra da terra, ou da terra ao nodo. Ora, nos eclipſes da lua, tomamos o angulo em $N = 5°17'$, e na poſição I o valor de Ev he quaſi $1°3'30''$; logo *ſen.* $5°17'$: raio : : *ſen.* $1°3'30''$: *ſen.* $EN = 11°34'$; por tanto quando EN he maior que aquella quantidade no tempo da oppoſição, não ha eclipſe. Eſta quantidade $11°34'$ ſe chama *limite ecliptico.*

488. Seja ArB (fig. 56) metade da ſombra da terra, por entre a qual paſſa a lua, NL a orbita relativa da lua; tire-ſe Cmr perpendicular a NL, e ſeja z o centro da lua no principio do eclipſe, m no meio, x no fim; AB a ecliptica, e Cn perpendicular a ella. No triangulo rectangulo Cnm, conhecemos Cn, latitude da lua no tempo da conjunção ecliptica, e o angulo Cnm (*a*) complemento do angulo, que a orbita relativa da lua faz com a ecliptica; logo *raio* : *cos.* Cnm : : Cn : nm, que ſe chama a *reducção*; e *raio* : *ſen.* Cnm : : Cn : Cm. Conhecido o movimento horario da lua (h) ſobre a ſua orbita relativa, conhecemos o tempo, em que ſe deſcreve mn, pela proporção : h : mn : : 1 *hora* : *tempo em que ſe deſcreve mn.* Por tanto, conhecido o tempo da conjunção ecliptica em n, conhecemos o tempo do meio do eclipſe em m. No triangulo rectangulo Cmz, conhecemos Cm, e Cz, ſomma dos ſemidiametros da ſombra da terra e da lua, achaſe $mz = \sqrt{(Cz^2 - Cm^2)} = \sqrt{(Cz + Cm)(Cz - Cm)}$.

(*a*) Se a latitude Norte, ou Sul da lua em n for creſcendo, o angulo Cnm ſe deve ajuntar ao recto; ſe diminuir, deve-ſe tirar de Cn.

Conhecido pois o movimento horario da lua, conhecemos o tempo, em que se descreve *zm*, que subtrahido do tempo em *m* dá o tempo do principio, e accrescentado, dá o tempo do fim. A grandeza do eclipse no meio he representada por *tr*, que he a maior distancia da lua dentro da sombra da terra, e he medida em partes do diametro da lua, que se concebe dividido em 12 partes iguaes, que se chamão *Digitos*, ou *partes difficientes*; para achar as quaes conhecemos C*m*, a differença entre o qual, e C*r* dá *mr*, que se ajunta a *mt*, ou se *m* cahir fóra da sombra, tomaremos a differença entre *mr* e *mt*, e teremos *tr*, donde, para acharmos o numero de digitos eclipsados, faremos, *mt* : *tr* :: 6 *digitos*, ou 360′, (porque he costume dividir hum digito em 60 partes iguaes, que se chamão minutos) : *os digitos eclipsados*. Se a latitude da lua for norte, empregaremos o semi-circulo *superior*; se for Sul, tomaremos o *inferior*.

489. Se a terra não tivesse atmosfera; quando a lua está em eclipse total, seria invisivel; mas pela refracção da atmosfera, alguns raios hão de cahir na superficie da lua, e por este motivo, ver-se-ha a lua naquella hora, e parecerá de huma côr vermelha escura. *Maraldi* observou que, em geral, a sombra da terra, em certa distancia, he separada por huma especie de penumbra da refracção da atmosfera. Isto dá a razão, porque o contorno da lua he mais visivel em huns eclipses totaes do que em outros. Dizem que a lua, nos eclipses totaes de 1601, 1620, e 1642, desappareceu inteiramente.

490. Como hum eclipse da lua provém da sua real privação de luz, deve começar a apparecer no mesmo instante em todos os lugares do hemisferio da terra, que está voltado para a terra. Daqui vem hum methodo muito facil de achar a differença de longitudes dos lugares sobre a terra, que depois explicaremos. A lua entra na penumbra da terra antes de chegar á sombra, e por tanto perde a luz gradual-

mente; e a penumbra he tão efcura perto da fombra, que he difficil affignar exactamente o tempo, em que o limbo da lua toca a fombra, ou quando começa o eclipfe. Quando a lua tem entrado na fombra, a fombra no feu difco fe diftingue fufficientemente bem, e fe póde determinar com exacção attendivel o tempo, em que cada mancha entra na fombra. Por iffo, o principio e o fim de hum eclipfe da lua não são tão proprios para determinar a longitude, como o tempo, em que a fombra toca qualquer mancha.

CAPITULO III.

Dos eclipfes do Sol.

491. HUm eclipfe do Sol refulta da interpofição da lua entre o Sol e o obfervador, ou pela fombra da lua, que cahe fobre a terra no lugar do obfervador. Huma figura explica melhor as differentes efpecies de eclipfes. Seja S (fig. 57) o Sol, L a lua, AB, ou A'B' a fuperficie da terra; tirem-fe as tangentes *pxus*, *qzur*, do Sol ao *mefmo* lado da lua, e *xvz* ferá a *fombra* da lua, na qual não fe póde ver parte do Sol; fe tirarmos as tangentes *ptbd*, *qwac* do Sol aos lados oppoftos da lua, o efpaço comprehendido entre a fombra e *wac*, *tbd* fe chama penumbra, na qual fe vê fómente parte do Sol. Ora, he claro que fe AB for a fuperficie da terra, o efpaço *mn*, em que cahe a fombra, foffrerá hum eclipfe *total*; que a parte *am*, *bn*, entre os limites da fombra e penumbra, foffrerá hum eclipfe *parcial*; mas em todas as outras partes da terra não haverá eclipfe. Seja agora A'B' a fuperficie da terra, eftando a terra em differentes tempos, em differentes diftancias da lua; então o efpaço dentro de *rs* foffrerá hum eclipfe *annular*; porque, fe tirarmos as tangentes de qualquer ponto dentro de *rs* á lua, cahirá evidentemente dentro do Sol, por tanto o Sol parecerá redondo em torno da lua na figura de hum

annel; as partes *cr*, *sd* ſoffreráõ hum eclipſe *parcial*, e as outras partes da terra não ſoffreráõ eclipſe. Neſte caſo não poderá haver eclipſe total em parte alguma, porque a ſombra da lua não comprehende a terra. Conforme *Sejour*; hum eclipſe não póde ſer annullar mais de 12′24″, nem total mais de 7′58″.

492. A ſombra *xvz* he hum cone, e a penumbra *wcdt* o tronco de hum cone, cujo vertice he V. Por tanto, ſe forem ambas cortadas pelo ſeu eixo commum e perpendicularmente, a ſecção de cada hum ſerá hum circulo, que tenha hum centro commum na linha, que ajunta os centros do Sol e da lua, e a penumbra inclue a ſombra.

493. O movimento medio da lua em torno do centro da terra he de 33′ por hora; mas 33′ da orbita da lua he perto de 2280 milhas, que conſideraremos como a velocidade, com que a ſombra da lua paſſa ſobre a terra; mas eſta he a velocidade ſobre a ſuperficie da terra, quando a ſombra cahe perpendicularmente ſobre ella, ſendo a velocidade perpendilar a L*v*; em qualquer outro lugar, a velocidade ſobre a ſuperficie creſcerá na razão do ſeno do angulo, que L*v* faz com a ſuperficie na direcção do ſeu movimento, para o raio. Mas tendo a terra a ſua rotação em torno do ſeu eixo, a velocidade *relativa* da ſombra da lua ſobre qualquer ponto dado da ſuperficie ſerá differente deſte; ſe o ponto ſe mover na direcção da ſombra, a velocidade da ſombra, reſpectivamente á aquelle ponto, ſerá diminuida, e por conſequencia augmentará o tempo, em que a ſombra paſſa ſobre elle; mas ſe o ponto ſe mover em direcção contraria á da ſombra, como quando a ſombra cahe ſobre o outro lado do pólo, o tempo diminuirá. Logo o comprimento de hum eclipſe do Sol he affecto da rotação da terra em torno do ſeu eixo.

494. Os eclipſes do Sol ſe explicão da maneira ſeguinte. Repreſente CL (fig. 58) a orbita da terra, OR a linha deſcrita pelos centros da ſombra da lua, e da

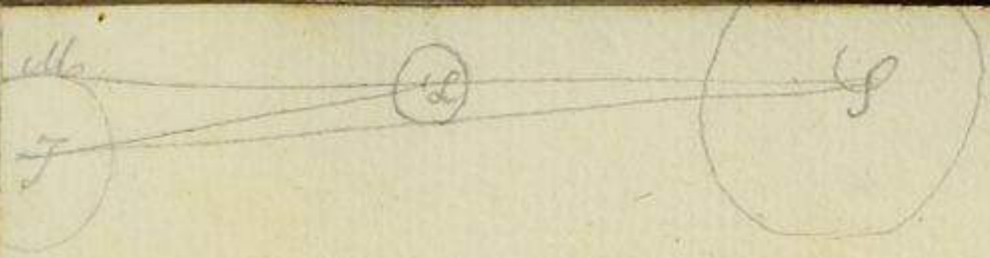
penumbra da terra ; N o nodo da lua, SF a terra, E o feu centro, *pn* a penumbra da lua, *u* a fombra. Então na pofição I a penumbra *pn* paffa pela terra fem cahir fobre ella, e por tanto não haverá eclipfe. Na pofição II, a penumbra *pn* cahe fobre a terra, mas a fombra *u* não ; por tanto haverá eclipfe *parcial* onde cahir a fombra, porém não total. Na pofição III, a penumbra *pn* e a fombra *u* cahem fobre a terra ; por tanto, onde a penumbra cahir, haverá eclipfe *parcial*, e onde cahir a fombra, haverá eclipfe *total* ; e nas outras partes da terra não haverá eclipfe. O limite ecliptico fe acha defta maneira. Seja o angulo N de $5°17'$, e na pofição I, o valor de E*u* (fendo *n* o centro da fombra) he de quafi $1°34'27''$; logo *fen.* $5°17'$: raio :: *fen.* $1°34'27''$: *fen.* EN$=17°21'27''$, *limite ecliptico* ; por tanto fe no tempo da conjunção a terra eftiver dentro defta diftancia do nodo, haverá eclipfe.

495. Hum eclipfe do Sol, ou antes da terra, fem attender a algum lugar particular, fe póde calcular exactamente do mefmo modo que hum eclipfe da lua, ifto he, o tempo, em que a fombra ou penumbra da terra começa a tocar, e deixa a terra; mas para achar o tempo do principio, meio e fim, em qualquer lugar particular, o lugar apparente da lua, como vifto dalli, fe póde determinar, e por confequencia fe calculará a fua parallaxe em latitude e longitude, o que faz o calculo de hum eclipfe do Sol fummamente extenfo e faftidiofo.

CAPITULO IV.

Principios do calculo de hum eclipfe do Sol em qualquer lugar particular.

496. HAvendo determinado que ha de haver eclipfe em hum lugar da terra, calcule-fe, pelas Taboas Aftronomicas, as verdadeiras longitudes



do Sol e da lua, e a latitude verdadeira da lua no tempo da conjunção media; procurem-ſe os movimentos horarios do Sol e da lua em longitude, e o movimento horario da lua em latitude; e calcule-ſe o tempo da conjunção ecliptica do Sol e da lua, da meſma maneira que ſe calculou o tempo da oppoſição ecliptica. Procure-ſe a longitude do Sol e da lua, e a latitude da lua para o tempo da conjunção ecliptica; ache-ſe tambem pelas taboas do movimento da lua a ſua parallaxe horizontal, da qual ſubtrahindo a parallaxe horizontal do Sol, teremos a parallaxe horizontal da lua deſde o Sol.

T = MST – LTS

= MLT – MST

497. Calcule-ſe ao tempo o tempo da conjunção ecliptica, a parallaxe da lua em latitude e longitude contadas do Sol, para a latitude do lugar dado, e a parallaxe horizontal contada do Sol (que empregaremos aqui em vez da parallaxe horizontal da lua, que preciſamos para achar o effeito da parallaxe em alterar as ſuas apparentes ſituações relativas); a parallaxe em latitude applicada á verdadeira latitude dá a latitude apparente (L) da lua ao Sol; e a parallaxe em longitude moſtra a differença apparente (D) das longitudes do Sol e da lua.

Seja S o Sol; CE (fig. 59) a ecliptica, ſegundo a ordem dos ſignos; tome-ſe SM$=$D, tire-ſe MN perpendicular á MS, e $=$L, então N he o lugar apparente da lua, e SN$=\surd(D^2+L^2)$ he a diſtancia apparente da lua ao Sol.

498. Se a lua eſtiver a l'Eſt do gráo nonageſimal, a parallaxe augmentará a longitude; ſe a Oeſt, diminui-la-ha; por tanto ſe as longitudes verdadeiras do Sol e da lua forem iguaes, no primeiro caſo o lugar apparente ſerá de S para E, e no ſegundo para C. Para o meſmo tempo, como huma hora, depois da conjunção verdadeira, ſe a lua eſtiver a Oeſt do gráo nonageſimal, ou antes da verdadeira conjunção ſe a lua eſtiver a l'Eſt do gráo nonageſimal, procure-ſe a longitude verdadeira do Sol e da lua, e a

latitude verdadeira da lua pelos ſeus movimentos horarios; e para o meſmo calcule-ſe a parallaxe da lua em latitude e longitude deſde o Sol, applique-ſe a parallaxe em latitude á verdadeira latitude, e dará a verdadeira latitude da lua ao Sol (l); tome-ſe a differença da longitude verdadeira do Sol e da lua, e applique-ſe a parallaxe em longitude, e dará a diſtancia apparente (d) da lua ao Sol em longitude. De S ſe tire SP$=d$, e ſobre EC ſe levante a perpendicular PQ igual a l, e Q he o lugar apparente da lua huma hora depois da conjunção verdadeira; e SQ ($=\sqrt{(d^2+l^2)}$) he a diſtancia apparente da lua ao Sol; tire-ſe a linha recta NQ; e ella repreſentará a paſſagem apparente relativa da lua, conſiderada como huma linha recta, em geral, ſendo iſto aſſim muito proximamente; o ſeu valor repreſenta tambem o movimento horario relativo da lua na orbita apparente, ſendo MP o movimento horario relativo em longitude.

499. A differença entre a diſtancia apparente em longitude da lua ao Sol no tempo da verdadeira conjunção ecliptica, e no intervallo de huma hora, dá o movimento horario apparente em longitude (r) da lua ao Sol; a differença (D) entre a verdadeira longitude na conjunção ecliptica, e a longitude apparente da lua, he a diſtancia apparente da lua ao Sol em longitude no tempo verdadeiro da conjunção ecliptica; logo, r : D :: 1 hora : o tempo entre a conjunção apparente e a verdadeira: por conſequencia ſabemos o tempo da conjunção apparente. Para conhecermos ſe eſte tempo he exacto, podemos calcular (pelos movimentos horarios do Sol e da lua) as ſuas longitudes verdadeiras, e a parallaxe da lua em longitude ao Sol, e applica-la á longitude verdadeira, e iſto dá a longitude apparente, e ſe eſta for a meſma que a longitude do Sol, eſtará exactamente achado o tempo da conjunção apparente; ſenão forem as meſmas, procure-ſe o tempo verdadeiro co-

mo acima. Para o tempo verdadeiro da conjunção apparente, procure-se a latitude verdadeira da lua pelo seu movimento horario, e calcule-se a parallaxe em latitude, e ter-se-ha a latitude apparente no tempo da conjunção apparente. Tire-se SA perpendicular a CE, e igual a esta latitude apparente; então o ponto A provavelmente não cahirá em NQ; mas supponhamos que cahe em NQ, e tire-se SB perpendicular a ella, e NR parallela a PM. Então conhecendo NR ($=$PM), e QR ($=$QP$\backsim$MN) temos

NR : RQ : : raio : *tang*. QNR, ou ASB
sen. QNR : raio : : QR : QN.

Como o tempo, em que se descreve NQ na orbita apparente, he igual ao tempo desde M até P em longitude, NQ he o movimento horario na orbita apparente.

R : *sen*. ASB : : AS : AB
R : *cos*. ASB : : AS : SB.

500. Na conjunção apparente a lua apparece em A, tempo que já conhecemos; quando a lua apparece em B, está na mais proxima distancia ao Sol, e por consequencia he o tempo da maior obscuração, (vulgarmente chamado o tempo do meio), quando alli houver eclipse, o que sempre acontecerá, quando SB for menor do que a somma dos semidiametros apparentes do Sol e da lua. Por tanto, se conhecermos que ha de haver eclipse, procederemos da maneira seguinte para acharmos a sua quantidade, e o principio, e o fim. Como podemos suppôr o movimento uniforme, QN : AB : : tempo em que he descrito NQ : tempo em que se descreve AB, que somado, ou tirado do tempo em A (conforme a latitude apparente diminue ou cresce) dá o tempo da maior obscuração.

501. Da ſoma dos ſemidiametros apparentes do Sol e da lua tire-ſe BS, e o reſto moſtra que parte do Sol he coberta pela lua, ou as partes deficientes; logo ſemidiametro ☉ : partes deficientes : : 6 *digitos* : digitos eclipſados. Se SB for menor do que a *differença* dos ſemidiametros do Sol e da lua, e o ſemidiametro da lua for *maior*, o eclipſe ſerá *total*; mas ſe for *menor*, o eclipſe ſerá *annular*, porque o Sol apparecerá á roda da lua: ſe B e S coincidirem, o eclipſe ſerá *central*.

502. Produza-ſe QN, ſe for neceſſario, e tome-ſe SV, SW iguaes á ſomma dos ſemidiametros apparentes do Sol, e da lua, reſpectivamente no principio, e no fim; então $BV = \sqrt{(SV^2 - SB^2)}$, e $BW = \sqrt{(SW^2 - SB^2)}$; e para achar os tempos, em que eſtes ſe deſcrevem, faça-ſe a proporção, como o movimento horario da lua na orbita apparente, ou NQ : BV : : 1 hora : tempo em que he deſcrito BV, e NQ : BW : : 1 hora: tempo em que he deſcrito BW; o qual tempo reſpectivamente ſubtrahido, e ajuntado ao tempo da maior obſcuração, dá proximamente o tempo do principio e do fim. Porém, ſe for neceſſaria maior exactidão, adoptar-ſe-ha hum methodo differente; porque ſupponhamos que VW ſeja huma linha recta, ſuppoſição, que em geral cauſa erros tão conſideraveis, que ſenão devem deſprezar. Todavia, póde ſempre ſervir de regra para tomar o tempo do principio e do fim. Daqui ſe ſegue que o tempo da maior obſcuração em B, não diſta neceſſariamente tanto do principio como do fim.

503. Se o eclipſe for total, tome-ſe SV, SW, igual á differença dos ſemidiametros do Sol e da lua; e então $BV = BW = \sqrt{(SW^2 - SB^2)}$, e com eſte dado podemos achar o tempo, em que ſe deſcreve BV, BW, como acima, o qual podemos conſiderar

como igual : e que applicado ao tempo da maior obſcuração em B, dá o tempo do principio, e fim da total obſcuração.

504. Para achar mais exactamente o tempo do principio e fim do eclipſe, podemos proceder da maneira ſeguinte. Para o tempo eſtimado do principio, procure-ſe, pelos movimentos horarios, e as parallaxes calculadas, a latitude apparente VD da lua, e a ſua longitude apparente DS contada do Sol, e teremos

$SV = \sqrt{(SD^2 + DV^2)}$, e ſe for igual ao ſemidiametro apparente ☽ + ſemidiametro ☉ (cuja ſoma chamaremos S) o tempo eſtimado ſerá o tempo do principio; mas ſe SV não for igual a S, tome-ſe outro tempo proximo a elle, antes, ſe SV for menor do que S, e depois, ſe for maior : para eſte tempo ſe calcule outra vez a latitude apparente da lua mv, e a longitude apparente Sm do Sol, e procure-ſe

$Sv = \sqrt{(Sm^2 + mv^2)}$; e ſe não for igual a S, continue-ſe deſta maneira; como a differença de Sv e SV : differença de Sv e SL (= S) :: o intervallo de tempo acima tomado, ou o tempo do movimento por Vv : o tempo do movimento por vL, que ſomado, ou ſubtrahido dó tempo em v, conforme Sv for maior ou menor do que SL, dá o tempo do principio. A razão deſta operação he que como Vv e vL são muito pequenos, ſerão muito proximamente proporcionaes ás differenças de SV, Sv, e Sv, SL. Mas como a variação da diſtancia apparente do Sol á lua não eſtá exactamente em proporção com a variação das differenças das longitudes e latitudes apparentes, quando ſe quer a maior exactidão, o tempo do principio achado por eſte methodo (ſenão eſtiver correcto) ſe póde corrigir, tomando-o por hum terceiro tempo, e procedendo, como acima. Todavia eſta correcção nunca ſerá neceſſaria, excepto quando ſe exigir ſumma exactidão em ordem a deduzir della algumas conſequencias. Mas o tempo aſſim achado póde conſiderar-fe como exacto, fómente tanto quanto as taboas do Sol e da lua podem delle depender para fua exactidão; e as melhores taboas da lua são fujeitas a hum erro de 30'' em latitude. Por tanto, obfervações exactas de hum eclipfe, comparadas com os tempos calculados, dão meios de corrigir as taboas. Da mefma maneira fe póde calcular o fim de hum eclipfe.

505. Como não ha muitas peffoas, que tenhão occafião de ver hum eclipfe total do Sol, daremos aqui os phenomenos, que acontecêrão a 22 de Abril de 1715. O Capitão *Stannyan*, em *Berne* na *Suiffa*, diz que o Sol efteve totalmente efcuro quatro minutos e meio; que as eftrellas fixas e planetas parecião muito brilhantes; e que o eclipfe foi precedido por huma facha de luz vermelha côr de fangue, da parte do limbo efquerdo, que não continuou mais de feis ou fete fegundos; então appareceu a parte do difco do Sol fubitamente, tão brilhante como fe via á noite *Venus*; depois mais brilhante, e que deu em hum inftante luz e fombra aos córpos, tão forte, como coftuma fazer o luar. O que fe conclue defte phenomeno he que a lua tem atmosfera.

J. C. *Facis* em *Genebra* diz ,, vio-fe, todo o tempo da immersão total, huma claridade, que pareceu romper detrás da lua, e equilibra-la igualmente por toda a parte; a fua largura era a duodecima parte do diametro da lua. *Venus*, *Saturno*, e *Mercurio* forão viftos por alguns; e fe o ar eftivesfe mais claro, ver-fe-hião muito mais eftrellas, e com ellas *Jupiter* e *Marte*. No campo muitos virão mais de 16 eftrellas; e alguns montanhezes virão o Ceo eftrellado, em alguns lugares, em que não havia nuvens, como durante a noite no tempo da lua cheia. A duração da efcuridade total foi tres minutos.

O Doutor J. J. *Scheuchzer* em *Zurich* diz ,, virão-fe planetas, e eftrellas; os paffaros bufcárão os ninhos; os morcegos fahírão dos buracos; e os peixes fe mettêrão no fundo; experimentámos hum frio confideravel , e cahio orvalho fobre a terra. A efcuridão total durou quatro minutos.

Halley (*a*) , que obfervou efte eclipfe em *Londres*, refere os feguintes phenomenos. ,, Obfervou-fe *geralmente* que quando a ultima parte do Sol demorava a l'Eft , elle ficou muito fraço , e facilmente fupportavel á fimples vifta , ainda pelo telefcopio , mais de hum minuto antes da efcuridade total ; quando pelo contrario , os meus olhos não podião fupportar o efplendor dos raios emergentes no telefcopio no primeiro momento. Para ifto concorrêrão talvez duas caufas ; huma que a pupilla devia neceffariamente dilatar-fe durante a efcuridade , em quanto antes fe havia contrahido muito olhando para o Sol. A outra he que as partes de l'Eft da lua , havendo foffrido o calor de hum dia quafi tão comprido como trinta dos noffos , de neceffidade havião de ter aquella parte da fua atmosfera cheia de vapores , levantados pela acção continua do Sol ; e por confequencia , era mais denfa perto da fuperficie da lua , e mais capaz de obftruir o efplendor dos raios do Sol. No mefmo tempo igualmente o lado de Oeft da lua havia foffrido huma noite do mefmo comprimento , durante a qual devião cahir em orvalho todos os vapores , que fe havião levantado no longo dia precedente ; e por efta razão , aquella parte da fua atmosfera devia parecer muito mais pura e tranfparente.

Quafi dois minutos antes da immersão total , a parte reftante do Sol eftava reduzida a huma ponta muito

---

(*a*) *Halley* começa affim a fua expofição. Ainda que feja certo , fegundo os principios da Aftronomia , que neceffariamente acontece hum eclipfe central do Sol em huma ou outra parte do globo terraqueo , quafi 28 vezes em cada periodo de 80 annos ; e que deftes não menos de 8 paffem pelo parallelo de Londres , tres dos quaes 8 são totaes com continuação ; todavia , delgada, cujas extremidades parecião perder a ſua agudeza, e tornar-ſe redondas como as eſtrellas. E no eſpaço de quaſi hum quarto de minuto, hum pequeno pedaço do limbo auſtral do eclipſe parecia ſeparado do reſto grande intervallo, e ſimilhante a huma eſtrella oblonga redonda nos dois extremos; apparencia, que reſulta das deſigualdades da ſuperficie da lua, havendo algumas partes levantadas perto do pólo auſtral da lua, por cuja interpoſição era interceptada parte daquelle delgado fio de luz excedente.

Poucos ſegundos antes do Sol ſe eſconder inteiramente, deſcobrio em torno da lua hum annel luminoſo, de quaſi hum digito, ou talvez de hum decimo do diametro da lua de largo. Houve huma claridade pallida, ou antes côr de perola, que me parecia hum pouco meſclada com as cores do *iris*, e concentrica com a lua: donde conclui que era a atmosfera da lua. Mas a ſua grande altura, que excedia muito a da noſſa atmosfera, e as obſervações de alguns, que achárão que a largura do annel creſcia da parte d'Oeſt da lua, á medida que ſe approximava a emersão; juntamente com os pareceres contrarios daquelles, cujas decisões eu ſempre reſpeitarei, me fizerão mais deſconfiado, eſpecialmente em huma materia, a que eu não dei toda a attenção neceſſaria.

Foſſe o que foſſe, o annel apparecia muito mais brilhante e branco perto do corpo da lua, do que diſtante della; e a ſua circumferencia exterior, que eſtava mal definida, parecia terminada ſómente pela extrema raridade da materia, de que era compoſta; e a

---

pela grande variedade de elementos, que entrão no calculo dos eclipſes, tem acontecido que deſde 20 de Março de 1140 não poſſo deſcobrir que ſe tenha viſto em Londres hum eclipſe total do Sol, ainda que neſte tempo a ſombra da lua tenha muitas vezes paſſado por outras partes da Gran-Bretanha.

todos os refpeitos tinha a apparencia de huma atmosfera allumiada, vifta de longe; mas não pertendo agora decidir fe pertencia ao Sol, ou á lua.

Em todo o tempo do eclipfe total, confervei o meu telefcopio conftantemente dirigido para a lua, para obfervar o que occorreffe naquella defufada apparencia, e vi perpetuas labaredas, ou corufcações de luz, que parecião por hum momento lançadas de detraz da lua, ora aqui, ora alli, por todos os lados, mas particularmente pelo lado d'Oeft, hum pouco antes da emersão; e huns dois ou tres fegundos antes, da mefma parte d'Oeft, por onde o Sol eftava quafi fahindo, huma liftra comprida e muito eftreita de luz fufca, mas vermelha efcura, parecia córar o extremo efcuro da lua, ainda que immediatamente depois da immersão nada fe vio fimilhante a ifto. Mas defvaneceu-fe inftantaneamente á primeira apparição do Sol, como tambem aconteceu ao annel luminofo, de que já fallei.

O gráo de efcuridade era tal, que fe podéra efperar ver mais eftrellas do que fe virão em Londres; os planetas *Jupiter*, *Mercurio*, e *Venus* forão os unicos viftos pelos Senhores da Sociedade do eirado de fua cafa, onde tinhão hum horizonte livre; e eu não ouvi dizer que alguem na Cidade viffe mais eftrellas fixas além da *Cabra* e *Aldebaran*. A luz do annel, que cercava a lua, não era capaz de apagar o luftre das eftrellas, porque era muito inferior á da lua cheia, e tão fraca, que não a vi lançar fombra. Mas as partes inferiores do hemisferio, mórmente ao Su-Eft debaixo do Sol, tinhão hum efplendor crepufcular; e á roda de nós, toda a parte do fegmento da noffa atmosfera, que eftava acima do horizonte, e fóra do cone da fombra da lua, eftava mais ou menos allumiada pelos raios do Sol; e a fua reflexão diffundia huma luz, que fazia o ar parecer enevoado, e eftorvava o verem-fe as eftrellas. E he claro que efta foi realmente a caufa de fe não verem, porque a efcuridade era mais perfeita naquelles lugares, perto dos quaes paſſava o centro da ſombra, onde ſe virão mais algumas eſtrellas, e em alguns, não menos de vinte, ainda que a luz do annel foſſe em tudo ſimilhante.

Receio referir o frio e a humidade, que acompanhárão a eſcuridade deſte eclipſe, de que muitos obſervadores forão ſenſiveis e igualmente juizes, ou o abalo, que em toda a caſta de animaes, paſſaros, beſtas e peixes, fez a extinção do Sol, porque nós meſmos não o podemos ver ſem algum ſentimento de horror. „

506. Se acontecer conjuncção do Sol e da lua no nodo, ou muito perto, haverá grande eclipſe do Sol; mas neſte caſo, na oppoſição precedente, a terra não eſtava dentro do limite ecliptico da lua, e na ſeguinte oppoſição eſtará fóra delle; logo em cada nodo acontecerá ſómente hum eclipſe do Sol, e por tanto em hum anno não póde haver mais de dois eclipſes do Sol.

507. Haverá huma conjuncção no tempo, em que a terra paſſa pelos limites eclipticos do Sol, e por conſequencia haverá hum eclipſe ſolar em cada nodo; por tanto haverá ao menos dois eclipſes do Sol em hum anno.

508. Se acontecer oppoſição pouco antes da terra entrar no limite ecliptico da lua, a ſeguinte oppoſição não acontecerá, em quanto a terra não paſſar além do limite da outra parte do nodo; logo, não haverá eclipſe da lua naquelle nodo. Por tanto quando houver ſó dois eclipſes no anno, ſerão ambos do Sol.

509. Se houver eclipſe da lua, quando o Sol entra no limite ecliptico da lua; elle ſahirá do limite antes da ſeguinte oppoſição; conſequentemente haverá ſómente hum eclipſe da lua no meſmo nodo. Mas como os nodos da orbita da lua recuão quaſi 19° em hum anno, a terra póde chegar, dentro dos limites eclipticos da lua, ao meſmo nodo, ſegunda vez no decurſo de hum anno, e por tan-

to haverá tres eclipſes da lua em hum anno, e não mais.

510. Se acontecer eclipſe da lua no nodo, ou muito perto, póde haver conjunção antes, e depois, em quanto a terra eſtiver dentro dos limites eclipticos do Sol; por tanto em cada nodo, póde haver dois eclipſes do Sol, e hum da lua; e neſte caſo os eclipſes do Sol ſerão pequenos, e o da lua grande. Por tanto, quando os eclipſes não acontecem ſegunda vez em cada nodo, haverá ſeis eclipſes em hum anno, quatro do Sol e dois da lua. Mas ſe, como no ultimo caſo, acontecer hum eclipſe ao voltar a terra dentro dos limites eclipticos lunares ao meſmo nodo ſegunda vez no anno, haverá ſeis eclipſes, tres do Sol, e tres da lua.

511. Póde haver ſete eclipſes em hum anno. Porque 12 lunações fazem 354 dias, ou 11 dias menos do que hum anno commum. Por tanto ſe hum eclipſe do Sol acontecer antes de 11 de Janeiro, e houverem naquelle nodo e no ſeguinte dois eclipſes do Sol, e hum da lua em cada hum; então a duodecima lunação deſde o primeiro eclipſe dará huma lua nova dentro de hum anno, e (em razão do movimento retrogrado dos nodos da lua) a terra entrará nos limites eclipticos ſólares, e haverá outro eclipſe do Sol. Logo, quando houver ſete eclipſes em hum anno, 5 ſerão do Sol, e dois da lua.

512. Como raras vezes ha 7 eclipſes no anno, o numero medio ſerá 4. Os nodos da lua ſe movem retrogradamente quaſi 19° no anno, arco que a terra deſcreve em quaſi 19 dias, por conſequencia o medio das estações dos eclipſes acontecem quaſi 19 dias mais cedo do que no anno precedente.

513. Os limites eclipticos do Sol são maiores do que os da lua; e por tanto haverá mais eclipes do Sol do que da lua, quaſi na meſma proporção em que o limite he maior, iſto he, como 3 : 2 proximamente. Mas em qualquer lugar dado ſe vem mais eclipſes da lua do que do Sol, porque hum eclipſe

da lua he viſivel em todo hum hemisferio ; em quanto hum eclipſe do Sol he viſivel ſómente em huma parte , e por tanto he mais provavel ver hum eclipſe da lua do que do Sol. Como a lua eſtá tanto tempo acima como abaixo do horizonte , cada obſervador póde eſperar ver metade dos eclipſes da lua , que acontecem.

APPENDICE I.

Applicação dos principios precedentes aos calculos mais necessarios.

PROBLEMA I.

Achar a altura verdadeira de hum astro, dada a apparente.

514. *Exemplo I.* OBservou-se a altura de *Antares* 12°27'0'', pede-se a verdadeira.

Altura observada . . .	12°27' 0''
Refracção —	4 14
Altura verdadeira . . .	12°22'46''.

515. *Exemplo II.* Observou-se a altura do limbo inferior do Sol 33°20'30'' no dia 17 de Março de 1812; pede-se a altura verdadeira.

Alt. observ. limb. inf. ☉ .	33°20'30''
Semidiametro + ...	16 5,2
Alt. observ. ☉	33 36 35,2
Ref.—Par. . — . . .	1 18,2
Alt. verdad. ☉ , ...	33 35 17.

516. *Exemplo III.* Observou-se a altura do lim-

bo ſuperior da lua 24°15'20'' aos 5 de Abril de 1812, ás 5 horas 12'25'', na longitude de 2 horas 52'43'' O de *Greenwick*, pede-ſe a altura verdadeira.

Hor. do Relogio	5	12	25
Diff. de longitude	2	52	43
Hor. em *Greenwich*	8^h	5	8.

Sem. h. m. dia	15' 47''
m. noite	15 55
Diff. em 12^h . . +	8''
Diff. em 8^h 5'8'' . .	5'',4
Sem. h. ás 8^h &c. . .	15'52'',4
Sem. alt.	15'59'',4
P. h. m. dia	57'56''
m. noite	58 23
Diff. em 12^h . . +	27''
em 8^h 5'25'' . .	18'',2
P. h. ás 8^h Eq. . . .	58 14 ,2
Corr. —	2''
Par. hor. latitude . .	58'12'',2
Alt. app. limb. ſup. ☽ . . .	24°15'20''
Semidiametro —	15 59,4
Alt. obſerv. ☽	23 59 20,6
P.—R. + ...	51 01,4
Alt. verdad. ☽	24 50 22

PROBLEMA II.

Achar a latitude de hum lugar por meio da altura meridiana de hum aſtro.

517. *Exemplo I.* No dia 6 de Fevereiro de 1812 na longitude de 2 horas 52′43″ O de *Greenwick*, obſervou-ſe a altura meridiana do limbo inferior do Sol 54°16′0″, pede-ſe a latitude.

Alt. mer. ob. ☉	. . . . .	54°16′0″
Semidiametro +	. . . . .	16 13
Alt. mer. ob. ☉	. . . . .	54 32 13
Ref.—Par. —	. . . .	36
Alt. verd. ☉	. . . . .	54 31 37
Diſt. ao zenit	. . . . .	35 28 23
Declinação	. . . .	12 34 9
Latitude	. . . .	22 54 14.

518. *Exemplo II.* No 1°. de Março de 1812, na longitude do exemplo precedente, obſervou-ſe a altura meridiana do *Sirius* 50°38′45″, pede-ſe a latitude do lugar.

Alt. ob. *Sirius*	. . . .	50 38′45″
Refr. —	. . . .	46,2
Alt. v. *Sirius*	. . . . . .	50 37 58,8
Diſt. ao zenit	. . . . . .	39 22 1,2 S
Decl.	. . . .	16 27 47,2 S
Latitude	. . . .	22 54 14

Decl. 1800 . . . . 16°26'56''
Var. em 12^{a} 2^{m} + ... 51,2

Decl. na data da ob. 16 27 47,2

519. *Exemplo III.* A 13 de Junho de 1812, na longitude acima, obfervou-fe a altura meridiana do limbo fuperior da lua 81°33'40'', pede-fe a latitude.

Alt. m. ob. ☽ . . . . . 81°53' 0''
Sem. ☽ em alt. . . . . . . 15' 31''

Alt. m. ob. ☽ 81 37 29
P.—R. 8 1,5

Alt. verd. 81 45 30,5

Dift. ao zenit 8 14 29,5
Decl. . , ... 14 40 57

Latitude 22 55 26,5

Hor. da paffag. em Gr. 3^{h} 46' 0''
Diff. paff. . . . . 47'
Diff. para o merid. . . . . . . 5'',6
Hor. da paff. . . . . 3^{h} 46' 5'',6

Sem. m. d. . . . . 15' 18'' } 6''
m. n. 15 12
Sem. á hor. da paff. . . . 15'16'',1

P. h. m. d. . . . . . . 56 8 } 20''
P. h. m. n. 55 48

P. h. . . , ... 56' 1'',7
Dif. . . . . . . , . . . 1 ,4

56' 0'',3

$$\begin{array}{ll} \text{Decl. m. d.} \;\ldots & \left.\begin{array}{l} 15^{\circ}\ 7' \\ 13\ 44 \end{array}\right\} 1^{\circ}23' \\ \quad\text{m. n.} \;\ldots & \\ \text{Diff. } 3^{h} \;\ldots\ldots & 26\ 2'',9 \\ \hline \text{Decl.} \;\ldots\ldots & 14^{\circ}40'\ 57'',1 \end{array}$$

PROBLEMA III.

Dada a altura de hum aſtro, a ſua declinação, e a latitude do lugar, achar o azimuth.

520. Chamando L o complemento da latitude, a a altura verdadeira, d a declinação, temos pelas regras da trigonometria esferica

$$\mathit{ſen.}\tfrac{1}{2}\text{azimuth} = \sqrt{\left(\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a+d+\mathrm{L})\ \mathit{ſen.}(\tfrac{1}{2}(a+d+\mathrm{L})-\mathrm{L})}{\cos.a\ \mathit{ſen.}\ \mathrm{L}}\right)}$$

521. *Exemplo.* Aos 6 de Abril de 1812 ás 5 horas 3′20″, longitude O *Greenwich* 2 horas 52′43″, obſervou-ſe a altura apparente do limbo inferior do Sol 10°55′45″, na latitude de 22°54′10″ S.

$$\begin{array}{lll} \text{Hora} \;\ldots & 5^{h}\ 3'\ 20'' & \\ \text{Long.} \;\ldots & 2\ 52\ 43 & \\ \hline & 7\ 56\ \ 3 & \\ \text{Decl. ás } 7^{h} \text{ \&c.} & & \\ \hline \text{ao m. dia} & 6 \;\ldots & 6^{\circ}\ 30'\ 11'' \\ \text{———} \;\ldots & 7 \;\ldots & 6\ 52\ 46 \\ \hline & & 22\ 35 \\ \text{Diff. ás } 7^{h} \text{ \&c.} & \ldots & 7'\ 28'' \\ \text{Decl.} \;\ldots\ldots & & 6^{\circ}\ 37'\ 39''\text{N.} \end{array}$$

Alt. appar. ⊙ . . .	10° 55′ 45″	
Sem. . . + ...	15 59	
Alt. appar. ⊙ . . .	11 11 44	
Cor.	4 33	
Alt. verd. ⊙ . . .	11° 7′ 11″	

Alt. v. ⊙ (*a*)..	11° 7′ 11″..L′*s*′	 0,0082308
Decl. . . . (*d*)..	96 37 39	
C.Lat. . . (L)..	67 5 50. . .L′*s*′	 0,0356618
S.	174 50 40	
$\frac{1}{2}$S. . . .	87 25 20 L. *cos*.	 8,6529763
$\frac{1}{2}$S—L . .	20 19 30 L*s*	 9,5407609
	S.	 18,2376298
	$\frac{1}{2}$S.	 9,1183149
$\frac{1}{2}$*az*. . . .	7°34′15″,6	
az	15° 8′31″,2	

PROBLEMA IV.

522. No mesmo dia do exemplo precedente ás 5 horas 3′20″, observou-se a altura do limbo inferior do Sol 10°55′45″ na longitude 2 horas 52′43″O. *Greenwich*, pede-se o tempo verdadeiro.

Hora do relogio . . .	5^h 3′ 20″
D. em Longitude . . .	2 52 43
Hora em *Greenwich* . .	7°56′ 3″
Alt. obs.	10°55′45″
Sem.	15 59
Alt. appar. ⊙	11 11 44
Refr. — P.	4 33
Alt. verd.	11 7 11

Tomando a fórmula

$$\text{fen.}\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\left(\frac{\text{fen.}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\text{fen.}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{fen.}\,a\,\text{fen.}\,b}\right)}$$

e applicando as denominações feguintes ; a a altura do aftro , l a latitude do lugar , e d a diftancia do aftro ao pólo , ou o complemento da declinação , vem

$$\text{fen.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ang.}\,h. = \sqrt{\left(\frac{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(a+l+D)\,\text{fen.}(\tfrac{1}{2}(a+l+D)-a)}{\text{cos.}\,l\,\text{fen.}\,D}\right)}$$

Alt. v. ☉ . .	11° 7′ 11″		
Dift. appar.. .	96 37 49	C.L.*fen.*	0,0029144
Latit.	22 54 10	C.L.*cos.*	0,0356627
Soma	130 39 10		
½ S.	65 19 35	L.*cos.*	9,6206030
½ S—*a*	54 12 24	L.*fen.*	9,9090915
		Soma	19,5682716
		½ S. . . .	9,7841358

½ *ang. h.* 37°28′ 6″,6

ang. h. . . 74°56′13 ,2 , e em tempo 4^h 59′45″

Hor. do relog. 5 3 20

Adiant. do rel. 3′35″

523. *Exemplo II.* A 15 de Setembro de 1812, na latitude e longitude acima , obfervou-fe a altura de *Rigel* (*β* de *Orion*) 18°2′40″ ás 8 horas 35′20″, pede-fe o tempo verdadeiro.

Hora do relog. . . .	8^h	35′	20″
D. Long.	2	52	43
Hora em *Greenwich*	11	28	3

Declinação em 1800	8°23′	29″ S.	
Var. em 12 horas &c.		2	2,5
Decl.	8	23	26,5

Alt. ob. * . .	18°	2′	40″
Refrac.		2	53,5
Alt. v. * . . .	17°	59′	46″,5

Afcens. reft. ☉ ao m. dia . .	11^h	32′	15″,8
——— * em 1800 . .	76	13	58
Vm. + ...		9	8,2
Afcens. reft. *	76	23	6,2
Dita em tempo . . . . . . :	5^h	5′	32″,2
Hora appr. da paf.	6	26	43 ,6
Afcenf. reft. ☉ ás 6^h &c. . .	11^h	33′	16″,5
Dita *	5	5	32 ,2
Hora mais appar.	6	27	44 ,3

Alt. v. * . .	17°59'46'',5		
Diſt. pol. . .	81 34 33 ,5	C.L.*ſen.*	0,0047110
Latitude . .	22 54 10	C.L.*cos.*	0,0356618
Soma	122 28 30		
½S.	61 14 15	L.*cos.*	9,6823076
— alt. . . .	43 14 28,5	L.*ſen.*	9,8357361
		Soma	19,5584165
		½ S.	9,7792082
½ *ang. h.*	36°58'29''		
ang. hor. em t. . . .	4^h 55'35'' 48		

Hor. paſſ.	6^h 27'44''
Ang. h.	4 55 35
Soma	11 23 19
Longit.	2 52 43
Hora do lug.	8 30 36
Hora do rel. . . .	8 35 20
Adiant.	4'44''

524. N.B. Em algumas Taboas vem a aſcensão recta do meridiano, que he o ponto do Equador, que no inſtante propoſto paſſa pelo meridiano, contado do equinocio medio. Como a paſſagem de huma eſtrella pelo meridiano acontece, quando a aſcensão della correſponde com a do meridiano, calcula-ſe o tempo da paſſagem, procurando aquelle, em que a aſcensão recta do meridiano ha de ſer igual á da eſtrella. O tempo da paſſagem de hum aſtro por qualquer circulo horario, aſſim como o da paſſagem pelo meridiano, reduz-ſe tambem a achar o tempo medio correſpondente a huma aſcensão recta do meridiano conhecida, não ſendo porém ſó a do aſtro, mas ſim eſſa augmentada, ou diminuida do angulo horario, conforme o aſtro ficar para o Occidente, ou para o Oriente do meridiano. Temos adiante hum exemplo deſte calculo numero 549.

Eſte methodo ſó differe do precedente em ſe reduzir o angulo horario a gráos, a razão de 15° por hora, e no calculo pela aſcensão recta da eſtrella ſe reduz á razão de 15° por 59',836. Vejão as *Ephemerides de Coimbra*, e *Mackay's the Theory and Pratice of Longitude* &c. p. 122.

525. *Exemplo III.* A 10 de Julho de 1812 na longitude e latitude acima, obſervou-ſe a altura do limbo ſuperior da ☾ 22°46'40'' ás 5 horas 21'20'', pede-ſe a hora.

Sem. h.	15'23''
m. n.	15 18
Diff. 12^h —	5''
em 8^h 14'3'' . . .	3'',3
Sem. hor.	15'19'',7
Sem. alt.	15 26
Par. h. m. dia	56'29''
m. noite	56 10
Diff. em 12^h	19''
Diff. em 8^h &c.	13''
P. h. ás 8^h &c. . . .	56 16
Dim.	2
	56 14
Declinação	16° 9'
	14 53
Diff. em 12^h	1° 16'
em 8^h	52 8
Decl.	15°16'52''

Alt. ob. ☽	22 46′ 40″
Sem. —	15 25
Alt. appar. ☽	22 31 15
P.—R. + ...	49 40
Alt. verd. ☽	23 20 55

Hor. da passag. em Gr.		1^h 32′
Diff. em 24^h	48′	
Diff. em 2^h	52′48″ . . .	5′46″
Hor. passag.		1^h 37 46

Hor.	5 21 20
Long.	2 52 43
H. Gr.	8 14 3

Alt. v. ☽	23°20′55″		
Dist. p. .	105 56 52	C.L.*sen.*	0,0156328
Lat. . . .	22 54 10	C.L.*cos.*	0,0355618
Som. . .	151 31 57		
½ S. . . .	75 45 58,5	L.*cos.*	9,3907120
— alt. . .	52 25 3,5	L.*sen.*	9,8999869
		Som.	19,3419935
		½ S.	9,6709967 =
			(27°57′25″,4)

Ang. hor.	3^h 43′39″
Hor. pass.	1 37 46
Temp. v.	5 21 25
Dito rel.	5 21 20
Atraz.	5″ (*a*).

APPENDICE II.

Do calculo de Longitude.

526. O Problema de achar a latitude geografica se reduz (como vimos) a achar no Ceo hum arco, que tenha a mesma amplitude, que a latitude procurada, e a distancia do equador ao zenith, ou a altura do pólo, satisfazem a esta condição. Não he igualmente facil achar a longitude, e todos os methodos se reduzem a achar a differença dos tempos entre os dois meridianos, para della concluir a longitude. A importancia deste problema tem desafiado as fadigas de muitos astronomos do primeiro merecimento, e os resultados dos seus trabalhos tem sido

. . . .

(*a*) Este methodo dá o tempo com hum minuto de differença. Se for mister mais exacção, reduzão-se as ascensões rectas do Sol e da lua ao lugar da observação, e ao tempo verdadeiro acima achado. A ascensão recta reduzida da lua, se applique á sua distancia ao meridiano, somando-a, ou diminuindo-a, segundo a lua houver sido observada no hemisferio de Oest, ou de Est, e teremos a ascensão recta do meridiano, da qual subtrahindo a ascensão recta do Sol, o resto será o tempo verdadeiro da observação. Se o erro do relogio, e a differença da declinação da lua forem consideraveis, repita-se o calculo do angulo horario.

. . . . .

methodos mais ou menos elegantes, porém tão ſufficientemente exactos, que he devido o maior reconhecimento aos ſeus ſabios inventores. Reduziremos eſtes methodos a dois; I.° pela obſervação de algum phenomeno inſtantaneo, 2.° pelos relogios maritimos.

527. Entre os phenomenos inſtantaneos merecem o primeiro lugar as immersões e emersões dos ſatellites de Jupiter, aſſim pela ſua frequencia, como pela facilidade da obſervação. Acha-ſe nas Ephemerides, ou Almanaks Nauticos, a hora da emersão ou immersão de cada hum no meridiano das taboas, e marca-ſe a hora do lugar, em que ſe obſerva eſte phenomeno, determinada por huma pendula bem regulada, e a differença dos tempos he a longitude.

528. Eſte methodo offerece duas difficuldades: nos mezes de Maio e Junho, em que o planeta eſtá mais perto do Sol, são inviſiveis os ſatellites, e por tanto neſtes mezes elle ſeria impraticavel: no reſto do anno a obſervação fica dependendo da atmosfera limpa no momento exacto da obſervação, que póde ſer eſtorvada pela mais pequena nuvem. No mar, os balanços do navio não permittem a obſervação, e ainda ſenão conſeguio de hum modo ſatisfatorio evitar eſte inconveniente. Por tanto os ſatellites de Jupiter são inteiramente inuteis á navegação.

529. Os eclipſes do Sol, ou as occultações das eſtrellas pela lua, podem tambem ſervir para determinar a longitude geographica, e *Lallande* acha eſte methodo o mais exacto, mais directo, mais elegante, e mais ſeguro de quantos ſe conhecem. Elle conſiſte 1.° em obſervar o principio e o fim de hum eclipſe do Sol, e da lua, ou a immersão e a emersão de huma eſtrella occultada pela lua: 2.° calcular o tempo da conjunção verdadeira: 3.° concluir do tempo da meſma conjunção para cada hum dos lugares a differença dos tempos, que he evidentemente a dos meridianos.

530. Todavia eſte methodo he aſſaz laborioſo, e requer que ſe profundem principios, que levemen-

te expuz, para attentar á brevidade indiſpenſavel á minha tarefa. Por eſte motivo abrirei mão delle, remettendo os que tiverem a curioſidade de o eſtudarem ao Livro X. da Aſtronomia de *Lalande*, numero 1970: pag. 433 do Tomo II. Edição de 1792.

531. As diſtancias da lua ao Sol ou ás eſtrellas, offerecem hum methodo tão facil como expedito. Achão-ſe ellas nas Taboas, e ſabendo-ſe a hora em que huma dada diſtancia acontece em hum lugar, a differença entre eſte tempo, e o que então ſe conta no meridiano das Taboas, dá a differença em longitude. Tudo ſe reduz por tanto a achar a diſtancia verdadeira, dada a diſtancia apparente, e he eſte o problema, que vai fixar noſſa attenção.

PROBLEMA.

Dada a diſtancia apparente da lua a hum aſtro, e a altura apparente da lua e do aſtro, achar a diſtancia verdadeira.

532. *I. Methodo.* Seja Z (fig. 60) o zenith, S o lugar apparente do Sol ou da eſtrella, s o lugar verdadeiro, L o lugar apparente da lua, l o verdadeiro; no triangulo ZSL, conhecemos SL, diſtancia apparente, SZ, LZ, complementos das alturas apparentes, e poderemos achar o angulo Z; e no triangulo sZl, em que he conhecido o angulo Z, e sZ, lZ, complementos das alturas verdadeiras, acharemos sl, diſtancia verdadeira.

533. *II. Methodo.* Poſtas as meſmas couſas, chamemos mais HN o horizonte, SN,a; sN,a'; LH,b; lH, b'; LS,d; ls,x; $a+b=h$, $a'+b'=h'$.

No triangulo ZSL, temos

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2}Z = \frac{\text{ſen.}\tfrac{1}{2}(ZS+ZL+LS)\times \text{ſen.}\tfrac{1}{2}(ZS+ZL-SL)\times r^2}{\text{ſen.}ZS\times \text{ſen.}ZL}$$

ou porque

$ZS = 90^\circ - a$, $ZL = 90^\circ - b$ .. $ſen.\frac{1}{2}(ZS+ZL+LS) = ſen.\frac{1}{2}(90^\circ - a + 90^\circ - b + d) = ſen.(90^\circ - \frac{1}{2}(a+b-d)) = cos.\frac{1}{2}(a+b-d) = cos.\frac{1}{2}(h-d)$ .. $ſen\,\frac{1}{2}(ZS+ZL-SL) = ſen.\frac{1}{2}(90^\circ - a + 90^\circ - b - d) = ſen.(90^\circ - \frac{1}{2}(a+b+d)) = cos.\frac{1}{2}(a+b+d) = cos.\frac{1}{2}(h+d)$ .. $ſen.ZS = cos.a$, $ſen.ZL = cos.b$, ſerá

$$cos.^2\,\tfrac{1}{2}Z = \frac{cos.\frac{1}{2}(h-d)\,cos.\frac{1}{2}(h+d) \times r^2}{cos.a\;cos.b}.$$

No triangulo Zsl, teremos do meſmo modo

$$cos.^2\,\tfrac{1}{2}Z = \frac{cos.\frac{1}{2}(h'-x)\,cos.\frac{1}{2}(h'+x) \times r^2}{cos.a'\,cos.b'}.$$

Logo

$$\frac{cos.\frac{1}{2}(h-d)\,cos.\frac{1}{2}(h+d)}{cos.a\;cos.b} = \frac{cos.\frac{1}{2}(h'-x)\,cos.\frac{1}{2}(h'+x)}{cos.a'\;cos.b'} \quad (A).$$

Façamos

$$\frac{cos.\frac{1}{2}(h-d)\,cos.\frac{1}{2}(h+d)\,cos.a'\;cos.b'}{cos.a\;cos.b} = B^2,$$

a fórmula A ficará

$$B^2 = cos.\tfrac{1}{2}(h'-x).\;cos.\tfrac{1}{2}(h'+x),$$

e pondo em lugar de $cos.\frac{1}{2}(h'-x)$ e $cos.\frac{1}{2}(h'+x)$ os ſeus valores

$$B^2 = \frac{(co.\frac{1}{2}h'cos.\frac{1}{2}x + ſen.\frac{1}{2}h'ſen.\frac{1}{2}x) \times cos.\frac{1}{2}h'cos.\frac{1}{2}x - ſen.\frac{1}{2}h'ſen.\frac{1}{2}x)}{r^2},$$

ou

$$B^2 r^2 = cos.^2\,\tfrac{1}{2}h'cos.^2\,\tfrac{1}{2}x - ſen.^2\,\tfrac{1}{2}h'ſen.^2\,\tfrac{1}{2}x,$$

ou

$$B^2 r^2 = (r^2 - ſen.^2\,\tfrac{1}{2}h').(r^2 - ſen.^2\,\tfrac{1}{2}x) - ſen.^2\,\tfrac{1}{2}h'ſen.^2\,\tfrac{1}{2}x,$$

$$B^2 r^2 = r^4 - r^2 \, sen.^2 \tfrac{1}{2}h' - r^2 \, sen.^2 \tfrac{1}{2}x - sen.^2 \tfrac{1}{2}h' sen.^2 \tfrac{1}{2}x$$
$$+ sen.^2 \tfrac{1}{2}h' sen.^2 \tfrac{1}{2}x,$$

reduzindo, e dividindo

$$B^2 = r^2 - r^2 \, sen.^2 \tfrac{1}{2}h' - sen.^2 \tfrac{1}{2}x = cos.^2 \tfrac{1}{2}h' - sen.^2 \tfrac{1}{2}x.$$

Seja

$$B^2 = \frac{sen.^2 A}{r^2} \times cos.^2 \tfrac{1}{2}h',$$

teremos

$$sen.^2 \tfrac{1}{2}x = cos.^2 \tfrac{1}{2}h' \times \left(1 - \frac{sen.^2 A}{r^2}\right) = cos.^2 \tfrac{1}{2}h \, \frac{cos.^2 A}{r^2};$$

donde vem finalmente

$$sen.\tfrac{1}{2}x = \frac{cos.\tfrac{1}{2}h' cos.A}{r}.$$

Para applicarmos os logarithmos, notaremos que a equação $B^2 = \frac{sen.^2 A}{r^2}.cos.^2 \tfrac{1}{2}h'$ dá $sen.A = \frac{B \times r}{cos.\tfrac{1}{2}h'}$. Logo será 1.° Log. $B = \tfrac{1}{2}$ [Log.$cos.\tfrac{1}{2}(h-d)$ + Log.$cos.\tfrac{1}{2}(h+d)$ + Log.$cos.a'$ + Log.$cos.b'$ + Co. Log.$cos.a$ + Co. Log. $cos.b$] : 2.°.Log.$sen.A$ = Log.B + Log.r + Co.Log. $cos.\tfrac{1}{2}h'$. Achado o log$sen.A$, veja-se na mesma linha e na columna dos cosenos Log.$cos.A$, e teremos
Log.$sen.\tfrac{1}{2}x$ = Log.$cos.\tfrac{1}{2}h'$ + Log.$cos.A$ − 10.

Typo do Calculo.

Diſt.app.☉ ☽	68°35 40″	Par. h. ☽	59′17″
Alt.ap.☉	33 31 0 (a)	C.L.*cos*..	0,0789771
Alt.ap. ☽	30 44 0 (b)	C.L.*cos*..	0,0657263
Soma	132 50 40 ($h+d$)		
½ Soma	66 25 20.	$\frac{1}{2}(h+d)$L.*cos*..	9,6010530
— Diſt.	2 10 20.	$\frac{1}{2}(h-d)$L.*cos*..	9,9996876
Alt. v. ☉	33 29 41,5 (a')	L.*cos*..	9,9211324
Alt. v. ☽	31 33 21,7 (b')	L.*cos*..	9,9305053
Soma	65 3 3,2 (h')	Soma	39,5970817
	Log. B	½Soma	19,7985408
½ Soma	32 31 31,6	$(\frac{1}{2}h')$L.*cos*..	9,9259063
	Log. *ſen*. A	Diff.	9,8726345
	Log. *cos*. A		9,8235699
	Log. *cos*.$\frac{1}{2}h'$		9,9259063
Log. *ſen*.$\frac{1}{2}x$		Soma	9,7494762
$\frac{1}{2}x = 34°10'15''$		$x = 68°20'30''$.	

Eſta fórmula he a de *Borda*, huma das mais ſimplices para a reducção da diſtancia.

534. *III. Methodo.* Poſtas as meſmas couſas, Ll, Ss ſerão a differença da refracção á parallaxe para os dois aſtros; e os triangulos ZLS, Zls dão eſtas proporções

$$(a)\ \text{ſen.ZL}\times\text{ſen.ZS} : \text{ſen.Z}l\times\text{ſen.Z}s :: \cos.(\text{ZL}-\text{ZS}) - \cos.\text{LS} : \cos.(\text{Z}l-\text{Z}s) - \cos.\,ls.$$

(a) $\cos.\,\text{A} = \dfrac{\cos.\text{BC} - \cos.\text{AC}\cos.\text{BA}}{\text{ſen.AB}\,\text{ſen.AC}}$ (ſendo o raio 1) (*le Gend.*)

Daqui ſe tira

$$(\mathit{sen}.ZL\times \mathit{sen}.ZS)\times(\mathit{cos}.(Zl-Zs)-\mathit{cos}.\,ls)= \mathit{sen}.\,Zl\,\mathit{sen}.Zs\,(\mathit{cos}.\,(ZL-ZS)-\mathit{cos}.LS)$$

ou

$$\mathit{sen}.ZL.\mathit{sen}.ZS.\mathit{cos}.\,(Zl-Zs)-\mathit{cos}.ls.\mathit{sen}.ZL\,\mathit{sen}.ZS= \mathit{sen}.Zl\,\mathit{sen}.Zs\,\mathit{cos}.\,(ZL-ZS)-\mathit{cos}.\,LS\,\mathit{sen}.\,Zl\,\mathit{sen}.Zs$$

$$\mathit{cos}.ls=\mathit{cos}.(Zl-Zs)-(\mathit{cos}.(ZL-ZS)-\mathit{co}.LS)\frac{\mathit{sen}.Zl\,\mathit{sen}.Zs}{\mathit{sen}.ZL\,\mathit{sen}.ZS}.$$

Seja

$$\mathit{cos}.ls=\mathit{cos}.H-(\mathit{cos}.h-\mathit{cos}.LS).C=\mathit{cos}.H-P\,;$$

e porque $\mathit{cos}.^2\tfrac{1}{2}ls=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mathit{cos}.\,ls$ (ſendo o raio $=1$)

$$\mathit{cos}.^2\tfrac{1}{2}\,ls=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\,\mathit{cos}.H-\tfrac{1}{2}\,P=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mathit{cos}.H-\mathit{sen}.^2\tfrac{1}{2}M;$$

$$1-\mathit{cos}.A=1-\frac{\mathit{cos}.BC-\mathit{cos}.AB\,\mathit{cos}.AC}{\mathit{sen}.AB\,\mathit{sen}.AC}$$

$$\mathit{sen}.AB\,\mathit{sen}.AC-\mathit{sen}.AB\,\mathit{sen}.AC\,\mathit{cos}.A=\mathit{sen}.AB\,\mathit{sen}.AC+\mathit{cos}.AB\,\mathit{cos}.AC-\mathit{cos}.\,BC\,,$$

ou

$$\mathit{sen}.\,AB\,\mathit{sen}.AC\,(1-\mathit{cos}.A)=\mathit{cos}.\,(AB-AC)-\mathit{cos}.BC,$$

ou

$$2\,\mathit{sen}.AB\,\mathit{sen}.AC\,\mathit{sen}.^2\tfrac{1}{2}A=\mathit{cos}.\,(AB-AC)-\mathit{cos}.BC.$$

No triangulo ZLS, temos

$$2\,\mathit{sen}.LZ\,\mathit{sen}.SZ\,\mathit{sen}.^2\tfrac{1}{2}Z=\mathit{cos}.\,(LZ-SZ)-\mathit{cos}.\,LS\,,$$

ou $\mathit{sen}.^2\tfrac{1}{2}Z=\dfrac{\mathit{cos}.(LZ-SZ)-\mathit{cos}.LS}{2\,\mathit{sen}.LZ\,\mathit{sen}.SZ}$; no triangulo Zls temos igualmente

$$\mathit{sen}.^2\tfrac{1}{2}Z=\frac{\mathit{cos}.(Zl-Zs)-\mathit{cos}.\,ls}{2\,\mathit{sen}.\,Zl\,\mathit{sen}.Zs}\,;$$

donde

$$\mathit{sen}.ZL\times\mathit{sen}.ZS:\mathit{sen}.Zl\times\mathit{sen}.Zs::\mathit{cos}.\,(ZL-ZS)-\mathit{cos}.LS:\mathit{cos}.\,(Zl-Zs)-\mathit{cos}.\,ls.$$

tomando $\frac{1}{2}$ P pelo quadrado do ſeno de hum arco $\frac{1}{2}$ M.

Porém $\frac{1}{2} - sen.^2 \frac{1}{2} M = \frac{1}{2} cos. M$; logo

$$cos.^2 \tfrac{1}{2} ls = \tfrac{1}{2} cos. M + \tfrac{1}{2} cos. H = cos. (\tfrac{1}{2} M + \tfrac{1}{2} H)\ cos. (\tfrac{1}{2} M - \tfrac{1}{2} H).$$

Expreſsão facil de calcular, quando ſe conhece M.

Para acharmos M, lembremo-nos que

$$sen.^2 \tfrac{1}{2} M = \tfrac{1}{2} P = \tfrac{1}{2} (cos. h - cos. LS). C = sen. (\tfrac{1}{2} Ls + \tfrac{1}{2} h) sen. (\tfrac{1}{2} LS - \tfrac{1}{2} h). C.$$

Deſta expreſsão ſe deduz a ſeguinte

Regra.

535. Tome-ſe a ſemiſomma e a ſemidifferença da diſtancia obſervada LS e da differença das alturas apparentes h; á ſoma dos logarithmos dos ſeus ſenos ajuntando o logarithmo C, iſto he, tirando a differença logarithmica, ou ajuntando o ſeu complemento, e tomando metade, ſerá eſta o logarithmo do ſeno de hum arco $\frac{1}{2}$ M. Tome-ſe a ſomma e a differença deſte arco e da ſemidifferença $\frac{H}{2}$ das alturas verdadeiras; ſomem-ſe eſtes logarithmos, tome-ſe a metade, e ter-ſe-ha o logarithmo *cos.* $\frac{1}{2}$ *diſtancia verdadeira.*

Exemplo.

Diff. das alt. ap. . . .	12° 5' 0"		
Diſt. ap.	102 30 0		
Soma	114 35		
Semiſoma	57 17 30	*ſen.*	9,9250191
Semidifferença . . .	45 12 30	*ſen.*	9,8510584
Comp. da dif. log. . . .	. . . .		9,9968490
		Soma	19,7729265
$\frac{1}{2}$ M — ſemiſoma			9,8864632

	ſen. 50°20′58″		
$\frac{H}{2}$ ſemid. das v. alt.	6 28 32		
Soma	56 49 30	*cos.*	9,7381446
Diff.	43 52 26	*cos.*	9,8578552
		Soma	19,5959998
		½ S.	9,7979999
cos. 51° 5′ 35″			
Diſt. verd. 102 11′ 10″.			

Eſte methodo, que tem o nome de *Dunthorne*, ſeu primeiro inventor, foi aperfeiçoado por *Maskeline*, que o deſembaraçou dos ſenos naturaes, e da diſtinção dos differentes caſos. Eſte grande Aſtronomo deu nas *Requiſite Tables*, huma Taboa, em que vem calculada a differença logarithmica (pag. 18 a 32 Edição de 1802), e outra dos ſenos naturaes (pag. 82), que facilitão muito as operações, e fazem eſte methodo o mais expedito.

536. *IV. Methodo.* Temos (*a*)

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}Z = \frac{ſen.\frac{1}{2}(ZL+ZS+LS)\,ſen.\frac{1}{2}(ZL+ZS-LS)}{ſen.ZL\,ſen.ZS} =$$

$$\frac{ſen.\frac{1}{2}(Zl+Zs+ls)\,ſen.\frac{1}{2}(Zl+Zs-ls)}{ſen.Zl\,ſen.Zs}.$$

Sejão A, *a*, B, e *b* os complementos de ZL, Z*l*, ZS, e Z*s*, reſpectivamente, e repreſente C e *c* a LS, e *ls*.

(*a*) The Theory and Pratice of finding the longitude at ſea or land &c. by Andrew Mackay, Aberdeen 1801. (pag. 142 e 279.)

Então

$$\tfrac{1}{2}(ZL+ZS+LS)=\tfrac{1}{2}(90°-A+90°-B+C)=90°-\tfrac{1}{2}(A+B-C)$$

$$\tfrac{1}{2}(ZL+ZS-LS)=\tfrac{1}{2}(90°-A+90°-B-C)=90°-\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

$$\tfrac{1}{2}(Zl+Zs+ls)=\tfrac{1}{2}(90°-a+90°-b+c)=90°-\tfrac{1}{2}(a+b-c)$$

$$\tfrac{1}{2}(Zl+Zs-ls)=\tfrac{1}{2}(90°-a+90°-b-c)=90°-\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

Logo substituindo,

$$\frac{Cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C).cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)}{sen.ZL.sen.ZS}=$$

$$\frac{Cos.\tfrac{1}{2}(a+b-c).cos.\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{sen.Zl\,sen.\,Zs}.$$

$$Cos.\frac{A+B-C}{2}cos.\frac{A+B+C}{2}=cos.\frac{a+b-c}{2}cos.\frac{a+b+c}{2}\times$$

$$\frac{sen.ZL.sen.ZS}{sen.Zl\,sen.Zs}.$$

A taboa citada no methodo precedente contém o logarithmo de $\frac{sen.ZL\,sen.ZS}{sen.Zl\,sen.Zs}$; chamemo-lo d, e seja

$$\frac{a+b-c}{2}=D,\ \frac{a+b+c}{2}=E,\ e\ A+B=F,$$

teremos

$$cos.\frac{F-C}{2}cos.\frac{F+C}{2}=cos.D.cos.E.d.$$

Mas

$$cos.\frac{F-C}{2}\,cos.\frac{F+C}{2}=\tfrac{1}{2}(cos.F+cos.C)$$ sendo o raio 1.

Logo

$$\tfrac{1}{2}(cos.F+cos.C)=cos.D.cos.\,E.d.$$

Seja

$$cos.D.cos.E.d=sen.^2\tfrac{1}{2}n.$$

Então

$$\tfrac{1}{2}(cos.\,F + cos.\,C) = sen.^2\,\tfrac{1}{2}n\,,\ e$$

$$cos.F + cos.C = 2 sen.^2\,\tfrac{1}{2}n = 1 - cos.\,n.$$

Más

$$cos.C = 1 - 2 sen.^2\,\tfrac{1}{2}\,C.$$

Logo

$$1 - 2 sen.^2\,\tfrac{1}{2}C = 1 - cos.n - cos.F\,,$$

Logo

$$sen.^2\,\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}(cos.n + cos.F) = cos.\frac{n+F}{2}\,cos.\frac{n-F}{2}.$$

Daqui se deduz a regra seguinte.

537. Somem-se a distancia apparente, e as alturas apparentes dos centros do Sol e da Lua, procure-se a differença entre metade da soma e a distancia apparente.

Tome-se a differença logarithmica correspondente á altura apparente, e parallaxe horizontal da lua, e ajunte-se-lhe o logarithmo coseno da dita semisoma e differença, e metade da soma destes tres logarithmos será o logarithmo seno de hum arco.

Some-se o logarithmo coseno da soma, e da differença deste arco, e a semisoma das alturas verdadeiras, metade da soma destes dois logarithmos será o logarithmo seno da metade da distancia verdadeira.

Exemplo,

538. Seja a distancia apparente dos centros do Sol e da Lua 38°45′40″, a altura do centro da lua 29°31, a altura apparente do centro do Sol 35°43′, e a parallaxe horizontal da Lua 57′43″. Pede-se a distancia verdadeira

		Soma das alt. app.	65°14′ 0″
		Corr. da alt. ☽ +	48 33
		Corr. da alt. ☉ —	1 12
Dist. app. =	38°45′40″		
Alt.app. ☽ =	29 31 0	Som.das alt.v.	66 1 21
Alt.app. ☉ =	35 43 0	½Som.das alt.v.	33 0 40½
Som.	103 59 40	Log.diff.tab. . .	9,996578
½ S.	51 59 50	. . . *cos*. . . .	9,789369
Diff.	13 14 10	. . . *cos*. . . .	9,988307
			19,774254
½ S. alt. v.	33 0 40½	. . . .	9,887127
Arco	50 27 19½	. . *sen*. . . .	
Soma	83 28 0	. . *cos*.	9,056071
Diff.	17 26 39	. . *cos*.	9,979553
			19;035624
	19 14 11	. . . *sen*. . . .	9,517812
Dist. verd.	38 28 22		

N. B. Em vez de tomar o ſeno de metade da ſoma dos tres logarithmos, ſe póde empregar o ſeu coſeno; então metade da ſoma do logarithmo da ſoma e differença deſte arco, e a ſemiſoma das alturas verdadeiras, ſerá o logarithmo ſeno da metade da diſtancia verdadeira. Por eſta transformação, os primeiros tres logarithmos ſerão coſenos, e os tres ultimos ſenos, o que ajuda muito a memoria.

539. Podem-ſe dar outros muitos methodos para fazer eſta reducção, mais ou menos faceis e elegantes, mas quaſi todos requerem taboas particulares, e por iſſo os omittimos. O de Mendoza e Rios reune eſtas duas qualidades, e merece a attenção dos calculadores; não o explicaremos, porque elle depende das Taboas dos ſenos verſos, coſenos verſos, &c., que elle imprimio em Londres em huma precioſa *Collecção de Taboas para a Navegação e Aſtronomia Nau-*

tica, 1.ª Edição 1797, 2.ª 1809. Deste mesmo Author se podem consultar a Memoria sobre alguns methodos novos de achar a longitude pelas distancias lunares, Madrid 1795, outra sobre a Astronomia Nautica, que vem nas Transacções Filosoficas de 1797, e o seu Tratado de Navegação, 2 Tomos; Madrid 1787. Seria muito util consultar a *Theory and Practice of finding the longitude at sea ad land &c., with new tables, by Andrew Mackay, in 2 vol.* II. *Edit. Aberdeen* 1801: onde se achará excellentemente tratada esta materia, e á qual sou devedor de alguns methodos expostos neste tratado. Igualmente não exponho o methodo de achar a distancia verdadeira, pelas taboas do Senhor *José Monteiro da Rocha*, explicadas pelo Senhor *Travassos*; porque a introducção a ellas he mais propria para tornar familiares os calculadores com o seu uso, do que a simples exposição, que eu fizesse neste lugar. Tambem não fallarei no methodo de reduzir a mesma distancia por hum instrumento, e operacões graphicas. Os curiosos o podem ver na obra citada do Astronomo de *Aberdeen*.

540. Achada a distancia verdadeira por qualquer dos methodos expostos, para a conclusão do calculo he necessario calcular a hora do lugar da observação, e por meio das taboas procurar a que hora se verifica aquella distancia no meridiano das taboas, e a differença destes tempos he a longitude referida ao meridiano das taboas.

541. *Exemplo.* A 7 de Dezembro de 1804 achou-se a verdadeira distancia dos centros do Sol e da lua 59°43′8″. Pede-se o tempo verdadeiro em *Greenwich*.

Dist. dada	59°43′ 8″		
Dist. ás 3^h	59 14 46	Diff.	0°28′22″
Dist. ás 6^h	60 40 13	Diff.	1 25 27

Parte prop. corr. 0^h 59′46″
Tempo preced. 3

H. em *Greenwich*. 3 59 46

542. Se alguma vez for impoſſivel, ou ao menos difficil, obſervar a altura, ou as alturas dos aſtros, dos quaes ſe toma a diſtancia, nem por iſſo o problema ſeria menos reſoluvel. Elle ſómente exige primeiro a ſolução do ſeguinte.

PROBLEMA.

Dado o tempo verdadeiro de hum lugar conhecido, achar as alturas apparente e verdadeira de hum objecto celeſte conhecido.

543. No triangulo PZS (fig.61) são conhecidos os lados PZ complemento da latitude, PS complemento da declinação, e o angulo P horario, calcule-ſe SZ pela Trigonometria (86), e ter-ſe-ha o complemento da altura verdadeira. Tome-ſe eſta, e appliquem-ſe-lhe as correcções indicadas, mas em ſentido contrario, e virá a altura apparente.

544. Quando por eſte methodo ſe quer ſupprir a obſervação das duas alturas, he neceſſario huma pendula bem regulada, para moſtrar o tempo verdadeiro; porque o menor erro no angulo horario altéra conſideravelmente a altura, principalmente quando o aſtro eſtá longe do meridiano. Podendo-ſe porém obſervar huma das alturas, por eſta ſe calculará o angulo horario, que ſervirá no calculo da outra altura. Cumpre advertir, que á hora dada pelo relogio ſe deve ajuntar, ou ſubtrahir a differença dos meridianos em tempo.

Reſta-nos ſómente moſtrar como ſe acha a longitude de hum lugar por meio de hum chronometro.

Do Chronometro e ſeu uſo para a determinação da longitude.

545. *Chronometro* he hum relogio, cujas peças são diſpoſtas de maneira, e feitas de metaes de tal ſorte combinados, que as dilatações ou compreſsões, que

refultão dos differentes gráos de calor ou de frio, fe compenfem mutuamente, e não altérem a neceffaria uniformidade do movimento.

Para fe poder fazer ufo defte inftrumento, cumpre determinar primeiro a fua marcha ácerca do tempo medio fideral por meio de obfervações feitas em algum lugar particular, e avaliar o feu erro naquelle meridiano, ou em algum outro lugar conhecido.

Hum obfervatorio he o lugar mais proprio para efte fim, porque alli fe póde determinar o erro com toda a exactidão, quer por alturas correfpondentes, quer pelas paffagens pelo meridiano. Em falta de obfervatorio podem tomar-fe alturas muitos dias fucceffivos. Quando eftas obfervações moftrão que a marcha diaria he proximamente a mefma, quero dizer, quando o chronometro adianta ou atraza proximamente a mefma porção de tempo cada dia, elle póde fervir para achar a longitude; no cafo contrario deve defprezar-fe.

PROBLEMA.

Achar a longitude de hum lugar por meio do chronometro.

546. Sol. Obfervem-fe muitas alturas do Sol ou de qualquer eftrella fixa; corrija-fe a media; com a altura verdadeira, a latitude do lugar, e a declinação do aftro, calcule-fe o tempo verdadeiro da obfervação; applique-fe-lhe a equação do tempo reduzida ao tempo e lugar da obfervação, e ter-fe-ha o tempo medio da obfervação.

Ao medio dos tempos das obfervações, dados pelo chronometro, applique-fe o feu erro, e o feu adiantamento ou atrazamento; o que dará o tempo medio no meridiano do lugar, em que fe eftabeleceu o erro e andamento do chronometro; applique-fe-lhe a differença de longitude em tempo entre effe lugar e o meridiano das taboas, e ter-fe-ha o tempo da obfervação no mefmo meridiano. A differença deftes tempos será a longitude do lugar em tempo; e será Eſt ou Oeſt, ſegundo o tempo deduzido da obſervação for maior ou menor do que o do meridiano.

Exemplo.

547. A 3 de Fevereiro de 1804, eſtando na latitude de 15° 48′ N, a altura media da Eſpiga da Virgem, a l'Eſt do meridiano, era 53° 24′, e o tempo medio correſpondente 15 horas 18′ 22″ pelo relogio, que ſe havia acertado pelo tempo ſolar medio no Rio de Janeiro a 5 de Dezembro de 1803, e ſe adiantava 53″,8 diariamente ſobre o tempo medio. A altura do obſervador era 16 pés. Pede-ſe a longitude do navio.

Variação diaria			53″, 8
N.° de dias entre 5 de Dezembro de 1803 e 3 de Fevereiro de 1804 . .			60
Adiantamento em 60 dias		53′	48″
Em 15^h 18′ — 54′ = 14^h 24′ adiant. .			32
Adiantamento total		54′	20
Tempo do relogio	15^h	18	22
Tempo medio no Rio de Janeiro .	14	24	2
Long. do Rio de Janeiro em tempo	2	50	55
Tempo medio em *Greenwich* . . .	17	14	57
Equação do tempo	—	14	12
Tempo verdadeiro em *Greenwich* . .	17	0	45

Altura media obſervada =	53°24′. 0
Depr. e Ref.	4. 5
Alt. cor.	53 19. 5

Asc. R. do ⊙ ao m. d. .	21^h 4′ 3″
Equ. para o R. de Jan. +	2 53
Asc. R. reduz. . . .	21 6 56

Com a latitude 15°48′N e a declinação 1°8′S e a altura correcta, calcule-ſe o angulo horario que dá

Diſtancia meridiana *	1^h 44′ 43″
Asc. R.	13 14 53
Asc. R. mer.	11 30 10
Asc. R. ⊙	21 6 56
Tempo verd.	14 23 14

Concluſão

Tempo verd. em *Greenwich*	17^h 0′ 45″
D.° no lugar da obs. . . .	14 23 14
Longitude em tempo . .	2 37 31 = 39°29′¼O.

548. Na pratica ſerá muito conveniente conſtruir huma taboa, que moſtre o erro do chronometro ao meio dia em muitas ſemanas ſeguidas, ou em todo o tempo, que ſe julgar ſufficiente para hir a hum lugar, onde ſe deve outra vez examinar o ſeu erro, e andamento. A eſta taboa ſe póde ajuntar huma columna, que contenha a ſua variação horaria, continuada até 24 horas.

Deste modo, supponDo que a variação diaria de hum chronometro, deduzida de huma serie de observações, era — 4″, 72; e o seu erro para o tempo medio a 9 de Maio de 1802 ao meio dia era 3′ 58″, 6 atrazado; então

Erro do Chronometro ao Meio dia				Variação horaria	
♂	*Maio*	9	*Erro.* = 3′ 58″, 6	1 *hora* =	0,″ 2
☿		10	. . . 4 3, 3	2 . .	0, 4
♃		11	. . . 4 8, 0	3 . .	0, 6
♀		12	. . . 4 12, 8	4 . .	0,
♄		13	. . . 4 17, 5	5 . .	1, 0
☉		14	. . . 4 22, 2	6 . .	1, 2
☾		15	. . . 4 26, 9	7 . .	1, 4
♂		16	. . . 4 31, 6	8 . .	1, 6
☿		17	. . . 4 36, 4	9 . .	1, 8
♃		18	. . . 4 41, 1	10 . .	2, 0
♀		19	. . . 4 45, 8	11 . .	2, 2
♄		20	. . . 4 50, 5	12 . .	2, 4

Methodos para achar a variação da agulha.

PROBLEMA I.

Dada a latitude do lugar, o dia do mez, e a amplitude magnetica do Sol, achar a variação da agulha.

549. Calcule-se a amplitude verdadeira pela Trigonometria Esferica, da maneira seguinte:

Do logarithmo do seno da declinação se tire o logarithmo do uso da latitude; e ter-se-ha o logarithmo coseno da amplitude verdadeira, e que será contada do Norte ou do Sul, conforme a declinação for Norte ou Sul.

Contem-se as amplitudes verdadeira e observada do mesmo ponto; isto he, ou ambas do Norte ou ambas do Sul. Então, se as amplitudes forem ambas para Est ou para Oest, a sua differença será a variação; mas se huma for para Est, outra para Oest, a somma será a variação.

Se as observações forem feitas no hemisferio de Est, a variação será Est, ou Oest, conforme a amplitude observada estiver mais proxima ou mais distante do Norte do que a verdadeira amplitude. O contrario acontece quando as observações são no hemisferio de Oest. Ou contem-se as amplitudes do Norte, se a observação for ao nascer do Sol; mas do Sul, se for ao pôr do Sol: então a variação será Est se a amplitude observada for menor do que a verdadeira amplitude, e Oest, se for maior.

Exemplo.

550. A 22 de Dezembro de 1810 na latitude 31.°38′ S, e longitude 83°O, observou-se o Sol ao SO. Pede-se a variação.

A declinação do Sol no tempo da observação he proximamente a mesma que em *Greenwich* ao meio dia, a saber 23°28′S.

Declinação . . .	23 28 . . .	*l sen.* . .	9,60012
Latitude	31 38 . . .	*l cos.* . .	9,93015
		l cos. . .	9,66997
Ampl. verd. S.	62° 7′	O	
Observada S.	45 0	O	
Variação	17 7	para Est, porque	

a amplitude observada he menor do que a verdadeira.

551. Se observarmos a amplitude do Sol no instante, em que o seu centro está no horizonte visivel, deve applicar-se á amplitude observada huma correcção, dependente da refracção horizontal, parallaxe horizontal, altura do olho, e a latitude do lugar, a fim de obter a amplitude do objecto, quando está no

horizonte verdadeiro. Todavia, póde-ſe evitar iſto, obſervando a amplitude, quando a altura do limbo inferior do Sol he igual á ſoma de 15′ e a refracção do horizonte. Deſte modo, ſe hum obſervador eſtiver elevado 17 pés, deve-ſe obſervar a amplitude, quando a altura do limbo inferior do centro he 19′.

Em circunſtancias favoraveis, e quando ſe requer grande exactidão, ſe deve obſervar a amplitude do limbo do Sol N ou S, ao qual applicando o ſemidiametro, dará a amplitude do centro.

PROBLEMA II.

Dado o azimuth magnetico, a altura, e declinação do Sol, com a latitude do lugar da obſervação; achar a variação da agulha.

552. Com a declinação, e altura verdadeira do aſtro, e a latitude do lugar, calcule-ſe o azimuth verdadeiro, e marque-ſe com a agulha o azimuth obſervado, a differença entre elles, ſe forem da meſma denominação, ou a ſoma, ſe forem de differente, ſerá a variação como acima

Exemplo.

553. A 14 de Janeiro de 1807 na latitude 33°52′S. longitude 53°15′, ás 3 horas ½ da tarde, ſe obſervárão as ſeguintes alturas e azimuths, ſendo a altura do obſervador 20 pés. Pede-ſe a variação.

Alt. ob.⊙	41°58′	Azim.N 63°24′O.	Decl.½d...	21°26S
	41 37	..... 63 52	.. Diſt.em 3½...–	2
	40 19	..... 64 18	.. Diff.Long...+	2
	54	154		21°26 S
Media . .	41 18	.... 63 51		

Pelo n.° 522, achar-ſe-ha azimuth = N 89 40 O
azimuth magnet. = N 63 51

variação 25 49

Para O, porque o azimuth obcervado eſtá á direita do azimuth verdadeiro.

554. Tambem ſe póde achar a hora da paſſagem do aſtro pelo primeiro vertical, e vêr qual deve ſer a ſua altura neſſe momento, tomar-ſe ha a altura aſſim calculada, e outro obſervador notará quanto a ſombra do fio da agulha azimuthal ſe affaſta da linha Eſt-Oeſt; ſerá eſte apartamento a variação da agulha.

555. Como, quando o aſtro eſtá no primeiro vertical, o angulo no zenith, ou o azimuth, he de 90°, e conhecemos a diſtancia polar e a latitude, podemos calcular o angulo horario, que convertido em tempo, dará a hora da paſſagem do aſtro pelo primeiro vertical. No meſmo triangulo podemos calcular a diſtancia do aſtro ao zenith, cujo complemento ſerá a altura verdadeira, da qual ſerá facil paſſar á apparente.

556. As fórmulas (que ſe deduzem da trigonometria esferica) são

$$\textit{cos. ang. h.} = \frac{\textit{cot. Lat. tang. decl.}}{\text{R}} = \frac{\text{R}\,\textit{tang. decl.}}{\textit{tang. lat.}},$$

$$\textit{ſen. alt. verd.} = \frac{\text{R}\,\textit{ſen. decl.}}{\textit{ſen. lat.}}.$$

F I M.

NOTA I.

Sobre a Parallaxe.

O Methodo, que démos no texto, he o que *La Caille* deu nas ſuas lições d'Aſtronomia; elle ſuppõe a terra perfeitamente esferica; mas quando ſe trata da parallaxe da Lua, não ſe deve deſprezar o achatamento da terra; então he neceſſario diminuir de alguns minutos as duas diſtancias ao zenith obſervadas (ſuppondo o zenith entre a Lua e o pólo elevado) e multiplicar o ſeno de cada huma pelo raio correſpondente da terra, antes de empregar a regra.

A ellipſe BECP(fig. 62)repreſenta metade do esferoide terreſtre, T he o centro, TP o eixo da terra, E o equador, B e C são os dois obſervadores, que ſupponho no meſmo meridiano, e obſervando ao meſmo tempo a Lua em L. ZBM, zCN são as perpendiculares á ſuperficie da ellipſe; iſto he, as linhas verticaes ou perpendiculares ao horizonte em B e C; o angulo LBZ he a diſtancia apparente da Lua ao zenith para o obſervador B, e LCz he a diſtancia apparente para o obſervador em C. Calculem-ſe os angulos MBT, NCT, formados pelas perpendiculares á ſuperficie da terra em B e C (*a*), e pelos raios BT e

---

(*a*) O angulo da vertical com o raio da terra ſe

CT tirados ao centro da terra ; tirem-ſe eſtes das diſtancias ao zenith , e ter-ſe-hão os angulos LCD , LBA , ou as diſtancias ao zenith na terra esferica. Como TB : TL :: *ſen.* TLB : *ſen.* TBL ou ABL , teremos quando B for recto , $\frac{TB}{TL}$ igual ao ſeno da parallaxe horizontal em *Berlin* , e pela meſma razão $\frac{TC}{TL}$ he o ſeno da parallaxe horizontal no ponto C ; aſſim o ſeno da ſomma ou do angulo BLC he igual á ſomma dos ſenos das duas partes BLT , CLT, que são as parallaxes de altura em cada eſtação ; iſto he, $= \frac{CT}{TL} . sen.\ LCD + \frac{TB}{TL} sen.\ LBA$, ſuppondo o coſeno de cada parallaxe igual á unidade ; logo a diſtancia $TL = \frac{TC sen. LCD + TB sen. LBA}{sen.\ BLC}$; e o ſeno da parallaxe horizontal em outro qualquer lugar como em E, do qual ſe conhecer a diſtancia ao centro

---

exprime por meio do achatamento. Seja o eixo menor $=1$, o maior $=1+\alpha$, ſendo α o achatamento , o quadrado de $1+\alpha = 1+2\alpha$ (deſprezando α^2 , que he muito pequeno) ; ſeja a abſciſſa x , a ſubnormal ſerá $= \frac{x}{1+2\alpha} = x(1+2\alpha)^{-1} = x(1-2\alpha)$ pela meſma razão , e (fig. 63) $CK = 2\alpha x = 2\alpha cos. lat.$, KD ſerá $= CK\ sen. KCD = CK\ sen.\ lat. = 2\alpha\ cos.\ lat.\ sen.\ lat. = \alpha\ sen.\ 2\ lat.$, e $sen.\ KED = \frac{DK}{DE}$ ou $\frac{DK}{CE} = \alpha\ sen. 2\ lat.$

$- = exp.$

$\frac{a^2}{r^2}(r^2 - x^2)$

$= a,\ a^2 = a + 1$

$(a+1)(1-x^2)$

$= (a+1)\, x dx$

$= (a+1) x$

da terra, ferá igual a $\frac{TE}{TL}$ ou igual ao raio da terra multiplicado por $\frac{\mathit{fen}.BLC}{TC\,\mathit{fen}.LCD + TB\,\mathit{fen}.LBA}$. Nefta fórmula fe ufa dcs raios da terra calculados n.º 72.

NOTA II.

Sobre o erro que fe póde commetter calculando a época do folfticio pelas taboas do Sol.

SEja D a declinação do Sol, ω a obliquidade da ecliptica, $\odot$ a longitude do Sol, temos, conforme a pag. 61, $\mathit{fen}.\,D = \mathit{fen}.\,\omega\,\mathit{fen}.\,\odot$.

Supponhamos que $\odot$ muda huma quantidade igual a $\odot'$; feja D' a mudança correfpondente á declinação D; a longitude $\odot + \odot'$; e a declinação $D + D'$ confervaráõ entre fi a relação expreffa pela equação precedente; ifto he,

$$\mathit{fen}.(D + D') = \mathit{fen}.\,\omega\,\mathit{fen}.(\odot + \odot').$$

Ora

$$\mathit{fen}.(D + D') = \mathit{fen}.D\,\mathit{cos}.D' + \mathit{cos}.D\,\mathit{fen}.D'.$$

E como o augmento D' he hum arco muito pequeno, póde-fe fubftituir ao feu feno, e confiderar-fe o feu cofeno como fenfivelmente igual á unidade; porque o feno he muito pequeno, o feno verfo he muito pequeno da fegunda ordem; teremos affim

$$\mathit{fen}.(D + D') = \mathit{fen}.D + D'\,\mathit{cos}.D.$$

Pelas mefmas razões

$$fen.(\Theta+\Theta')=fen.\Theta cos.\Theta'+cos.\Theta fen.\Theta'=fen.\Theta+\Theta' fen.\Theta.$$

Subftituindo na fórmula vem

$$fen.D+D'cos.D=fen.\,\omega fen.\Theta+\Theta' fen.\,\omega cos.\Theta.$$

Huma parte deftes termos fe deftroem, em virtude da equação (1); fica

$$D'cos.D=\Theta' fen.\,\omega\, cos.\Theta$$

donde

$$D'=\frac{\Theta' fen.\,\omega cos.\Theta}{cos.D}$$

Efta exprefsão fe póde ainda fimplificar, porque como fe fuppõe o Sol muito perto do folfticio, D he quafi igual a ω; donde fe fegue que $cos.$ D differe muito pouco de $cos.\ \omega$, feja

$$cos.D=cos.\omega\,(1+u)$$

fendo u huma fracção muito pequena, teremos

$$\frac{1}{cos.D}=\frac{1}{cos.\omega\,(1+u)}=\frac{1}{cos.\,\omega}(1-u+u^2\ldots+\&c.).$$

Se fubftituirmos nefta exprefsão o valor de D, poderemos mui bem limitar-nos ao primeiro termo $\frac{1}{cos.\,\omega}$; porque todos os outros eftão multiplicados pelas potencias da pequena fracção u, e ainda o hão de fer pela pequena fracção Θ', no valor de D. Poderemos por tanto defpreza-los, em comparação ao primeiro, e teremos fimplesmente

$$D'=\Theta'\frac{fen.\omega}{cos.\omega}cos.\Theta'$$

ou

$$(2)\quad D'=\Theta'\, tang.\omega\, cos.\Theta'.$$

Se houvesse engano de meio dia no tempo do solsticio, o erro em longitude seria certamente menor que 29',7. Supponhamo-lo igual a esta quantidade, teremos então $\odot' = 29',7$, e por consequencia $\odot = 39°30',3$, porque no solsticio, a longitude $\odot$ he de 90°. Se tomarmos simplesmente $\odot = 23°27'47''$, o valor de D' será

$$D' = 29',7.\ cos.\ 89°30',3.\ tang.\ 23°27'47''$$

ou

$$D' = 29',7.\ sen.\ 29',7.\ tang.\ 23\ 27\ 47.$$

Fórmula, que avaliada pelas taboas trigonometricas dá $D' = 6'',7$.

O seno do arco 29',7 he huma quantidade muito pequena, que sem erro sensivel se póde suppôr proporcional ao mesmo arco; então a expressão de D' terá por multiplicador $(29',7)^2$. Isto he, que o erro em declinação he proporcional ao quadrado do erro commettido em longitude. Assim suppondo $\odot' = 0',0297$, teremos

$$D' = \frac{6',7}{10000} = 0'',00067,$$

quantidade inteiramente insensivel.

NOTA III.

Sobre as fórmulas do movimento elliptico.

CHamemos *a* o semi-eixo maior da ellipse solar, ou a distancia media, *e* a excentricidade, *n* o movimento medio em hum dia, *r* o raio vector, e *v* a anomalia verdadeira correspondente ao tempo *t* corrido depois de passar pelo apogeo, teremos

$$\frac{r}{a}=1+\tfrac{1}{2}e^{2}+\left\{e-\tfrac{3}{8}e^{5}\right\}\cos.nt-\left\{\tfrac{1}{2}e^{2}-\tfrac{1}{3}e^{4}\right\}\cos.2nt..$$
$$+\&c.$$

$$v=nt-\left\{2e-\tfrac{1}{4}e^{5}\right\}\mathit{sen}.nt+\left\{\frac{5}{4}e^{2}-\frac{11}{24}e^{4}\right\}\mathit{sen}.2nt...$$
$$+\&c.$$

Veja-ſe Mechanica Celeſte Tomo I. pag. 181.

Neſtas fórmulas n he igual a 360°, ſendo t a revolução tropica, ou 365,24225 dias.

As quantidades, que entrão debaixo dos ſinaes periodicos, ſendo conhecidas, reſta ſó calcular os ſeus coefficientes; acerca do que notar-ſe-ha que ſendo o ſeno de hum angulo ſempre menor do que a unidade, as quantidades, que são inſenſiveis nos coefficientes, virão a ſer ainda menores, quando forem multiplicadas pelos ſenos, de ſorte que os poderemos logo deſprezar.

De mais, os termos, que formão as correcções da anomalia v, como são arcos, he neceſſario reduzi-los a gráos, como o primeiro nt, a fim de ter immediatamente o valor do arco expreſſo em gráos. Ora, iſto he facil; porque ſe chamarmos A hum arco qualquer, π a ſemi-circumferencia que tem o raio 1, o angulo correſpondente a eſte arco ſerá $\frac{180^{\circ}A}{\pi}$. Se o arco A for igual ao raio, que ſe toma por unidade em todos os calculos, o angulo correſpondente ſerá $\frac{180^{\circ}}{\pi}$; por iſto he que ſe acha nas taboas de logarithmos o da quantidade $\frac{180^{\circ}}{\pi}$ com o nome de logarithmo do arco igual ao raio. Eſte arco he de 57°,2957795.

Com esta reducção, teremos

$$v = nt - \frac{180}{\pi}\left\{2e - \tfrac{1}{4}e^3\right\} \text{sen.}\, nt + \frac{180}{\pi}\left\{\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right\} \text{sen.}\, 2nt \ \&c.$$

e o valor de v será immediatamente expresso em gráos, por esta serie, quando o tempo t for conhecido em dias.

A quantidade nt he o que se chama em astronomia anomalia media; e $v - nt$ he a equação do centro.

NOTA IV.

Sobre a comparação dos arcos da ecliptica e do equador.

Quando se referem os arcos da ecliptica ao plano do equador, tirando meridianos pelas suas extremidades, se acha que os arcos, que lhes correspondem, são desiguaes, e maiores ou menores, segundo a sua posição. Pelo calculo se obtem facilmente a medida exacta desta differença. Seja C (fig. 21) o centro da terra, ES'S'' a ecliptica, EQ'Q'' o equador, CP o eixo perpendicular. E*e* será a linha dos equinocios, e se ES' for o arco descrito em hum dia sobre a ecliptica pelo Sol, contando do ponto E, o meridiano PS'Q' determinará o arco EQ' do equador, que faz nesta epoca a differença do dia astronomico ao syderal. Por esta construcção, o triangulo esferico ES'Q' será rectangulo em Q', e chamando I a obliquidade da ecliptica, teremos

$$\frac{\text{Tang. EQ}'}{\text{Tang. ES}'} = \frac{\cos.\text{I}}{\text{R}}.$$

Como o coseno de hum angulo he sempre menor do que o raio R, *tang.* EQ′ será menor que *tang.* ES′, e por consequencia o arco EQ′ intercepto no equador, será maior que o arco ES′ descrito na ecliptica.

Esta relação subsistirá igualmente para todos os arcos da ecliptica e do equador, contados da mesma maneira, partindo do equinocio; de sorte que o Sol estando, por exemplo, em S″, teremos

$$\frac{tang.\,EQ''}{tang.\,ES''} = \frac{cos.\,I}{R}.$$

Se S for o lugar do solsticio, os arcos ES, EQ são iguaes entre si e a 90°. Assim, como EQ″ he menor que ES″, por compensação dever ser Q″Q maior que S″S; isto he, o arco intercepto no equador pelos meridianos PS″Q″, PSQ deve ser maior que o arco correspondente da ecliptica.

Póde-se facilmente calcular a sua differença, porque S″S = 90°—ES″; Q″Q = 90°—EQ″; por consequencia

$$Tang.\,ES'' = \frac{1}{Tang.\,SS''}$$

$$Tang.\,EQ'' = \frac{1}{Tang.\,QQ''}.$$

Estes valores substituidos na equação precedente, darão

$$\frac{Tang.\,Q''Q}{Tang.\,S''S} = \frac{R}{cos.\,I}.$$

Quer dizer, que a razão dos arcos correspondentes do equador e da ecliptica, no solsticio, he inversa da que he no equinocio. Assim, suppondo que o arco diurno, descrito pelo Sol na ecliptica, fosse constante, os arcos correspondentes do equador serião desiguaes, maiores que o arco da ecliptica no solsticio, menores no equinocio.

NOTA V.

Sobre a equação do tempo.

PAra não interromper o discurso, indiquei sómente o maior apartamento dos tres Soes, S', S'', S''' em cada quarto da circunferencia; mas seria facil calcula-lo exactamente. Com effeito, tendo S'' e S''' (fig. 30), hum movimento igual, o primeiro na ecliptica, o segundo no equador, a ascensão recta de S''' he sempre igual á distancia de S'' ao equinocio; assim, chamando y esta ascensão recta, e x a distancia do equinocio ao meridiano de S'', ou a ascensão recta de S'', teremos, pela nota precedente

$$Tang.\,y = \frac{R\,tang.\,x}{cos.\,I},$$

sendo R o raio das taboas, e I a obliquidade da ecliptica. Temos pelas fórmulas trigonometricas

$$Tang.\,(y-x) = R^2\,\frac{tang.\,y - tang.\,x}{R^2 + tang.\,y\;tang.\,x}.$$

Pondo, em lugar de y o seu valor, vem

$$tang.(y-x) = \frac{R\,tang.x(R - cos.I)}{R cos.I + tang.^2 x}.$$

He a differença das afcensões rectas de S'' e de S'''. Efta exprefsão póde tomar a fórma feguinte

$$Tang.(y-x)=\frac{R(R-cos.I)}{\sqrt{(R\,cos.I)}}.\frac{\frac{tang.x}{\sqrt{(R\,cos.I)}}}{1+\frac{tang.^2x}{R\,cos.I}}.$$

Se fizermos para maior fimplicidade

$$\frac{Tang.x}{\sqrt{(R\,cos.I)}}=z,$$

a parte variavel defta exprefsão ficará

$$\frac{z}{1+z^2},$$

e teremos

$$Tang.(y-x)=\frac{R(R-cos.I)}{\sqrt{(R\,cos.I)}}.\frac{z}{1+z^2}.$$

Ora a quantidade $\frac{z}{1+z^2}$ póde reprefentar-fe por

$$\tfrac{1}{2}-\frac{(1-z)^2}{2(1+z^2)}.$$

Logo ella he conftantemente menor que $\frac{1}{2}$, excepto o cafo em que $z=1$; porque então he igual a $\frac{1}{2}$; e efte he o feu maior valor. Affim, a maior differença entre as afcensões rectas de S'' e S''' correfponderá ao angulo x dado pela equação

$$x = 1\text{, ou } tang.\, x = \sqrt{(R\, cos.\, I)}\,,$$

e eſta maior differença $y-x$, ſerá dada pela equação

$$Tang.\,(y-x) = R.\frac{R - cos.\, I}{2\sqrt{(R\, cos.\, I)}}.$$

Se ſuppozermos $I = 23^\circ 27' 47''$, acharemos

$$x = 43^\circ 45' 51''$$
$$y - x = \ \ 2\ \ 28\ \ 18$$

e por conſequencia

$$y = 46\ \ 14\ \ \ 9\ ;$$

quer dizer que a maior differença entre as aſcensões rectas de S'' e S''' he $2^\circ 28' 18''$; ella acontece quando a ascensão recta de S''' he $46^\circ 14' 9''$, ſendo então a de S'' $43^\circ 45' 51''$.

Eſta differença reduzida a tempo, dá $9' 53''$ pelo maior atrazamento de S'' ao meridiano a reſpeito de S'''.

Podemos facilmente certificar-nos de que a equação do centro, que he agora $1^\circ 55' 27''$ na ecliptica, quando ella he maxima, nunca póde dar em ascensão recta huma differença igual a $2^\circ 28' 18''$. Com effeito, ſupponhamos o caſo mais favoravel, quando ella chega ao ſeu maximo no inſtante do ſolſticio; então deſignando por x o arco, que lhe correſponderia no equador, teriamos, conforme a nota precedente

$$Tang.\, x = R : \frac{tang.\, 1^\circ 55' 27''}{cos.\, I},$$

expreſsão, que calculada por logarithmos dá

$$x = 2^\circ 5' 51'',$$

ſe ſuppozermos que o meio do arco $1°55'27''$ coincide com o ſolſticio, teremos

$$x = 2°5'51'',5 ,$$

o que faria $0'',5$ de mais. Neſte caſo que he o mais favoravel, o reſultado ainda he muito menor que $2°28'18''$. Podemos por tanto eſtar ſeguros de que em caſo algum, a equação do centro que tem agora lugar na ecliptica, póde dar no equador huma differença de aſcensão recta igual a $2°28'18''$; e como todos eſtes elementos ſoffrem apenas variações periodicas muito lentas, encerradas em limites muito apertados, ſe póde daqui concluir que em todas as poſições poſſiveis da orbita ſolar na ecliptica, o Sol verdadeiro e o Sol medio coincidiráõ ſempre quatro vezes no anno.

O arco $2°5'51'',5$ reduzido a tempo, dá $8'23''$ tempo medio, por conſequencia, ſe a maior equação do centro coincidiſſe com a maior diſtancia de S'' e de S''', de maneira que os tres Soes eſtiveſſem na ordem S', S'', S''', ou S''', S'', S', a differença de aſcensão recta entre o Sol verdadeiro S' e o Sol medio S''', feria menor que $2°6'2'' + 2°28'18''$, ou $4°34'20''$, que dá em tempo $18'17''$. Ora eſta diſpoſição, a mais favoravel de todas, não póde ter lugar na ſituação actual da orbita ſolar, aſſim a differença do tempo medio ao verdadeiro nunca póde chegar a $18'$ de tempo.

Para completar a theorica, que tenho explicado, vou referir aqui a fórmula da equação do tempo, qual a deu *Lagrange* em huma belliſſima Memoria, que tem por titulo, Indagações ſobre o modo de formar as taboas dos planetas ſómente pela obſervação. Acad. das Sciencias 1772.

Se chamarmos φ a longitude do Sol, ω a obliquidade da ecliptica, α a longitude do apogeo, e a razão da excentricidade para o ſemi-eixo maior; e k o raio do equador reduzido a ſegundos, ou $206264'',8$.

Se fizermos por mais ſimplicidade

$$\frac{e}{1+\sqrt{(1-e^2)}}=e',$$

a equação do tempo reprefentada por T, e expreffa em fegundos, terá por valor

$$T=-2ke\,fen.(\varphi-a)-k(tang.\frac{\omega}{2})^2 fen.2\varphi$$

$$-2k(e-\frac{e'}{2})\,e'\,fen.2(\varphi-a)-\frac{k}{2}(tang.\frac{\omega}{2})^4 fen.4\varphi$$

$$-2k(e-\frac{2e'}{3})\,e'^2 fen.3(\varphi-a)+\frac{k}{3}(tang.\frac{\omega}{2})^6\; fen.\,6\varphi.$$

&c.

Não fe trata mais que de fubftituir nefta fórmula os valores dos numeros k, e, e dos angulos a, ω, que fe fuppõe dados pelas obfervações.

Ora, no eftado actual da orbita folar, temos

$$e=0{,}016791$$
$$a=98^{\circ}47'\,11''$$
$$\omega=23\;27\;58.$$

Somando o logarithmo de e, que he $-2+0{,}2250766$ ao de $2k$, que he 4,4393638, acha-fe o logarithmo de $2ke$ igual a 2,6644404, ao qual corr较ponde o numero 461,786. He o coefficiente de $fen.\,(\varphi-a)$ Depois temos

$\frac{\omega}{2}=11^{\circ}43'59''$; donde $log.\;tang.\frac{\omega}{2}=9{,}3164193$, e

$log.\,(tang.\,\frac{\omega}{2})^2=8{,}6328386.$

ao que ajuntando o logarithmo de k que he 4,1383338, e tirando da caracteriftica 10 unidades, ou o logarithmo do raio, teremos 2,7711724, a que correfponde o numero

590'',435. He o coefficiente de 2φ. Acha-se do mesmo que os coefficientes seguintes são 2,9'', e 12,68. Por consequencia são muito pequenos em comparação aos precedentes; e como os seguintes serião ainda menores, porque são multiplicados pelas potencias successivas da excentricidade podemos despreza-los sem erro sensivel. Então a equação do tempo expressa em segundos, será representada com toda a exactidão necessaria pela fórmula seguinte

$$T = -461'',786\ sen.(\varphi-\alpha) - 590'',435\ sen.2\varphi$$
$$-2'',9\ sen.2(\varphi-\alpha)\ 16,28\ sen.\ 4\varphi.$$

Os senos que entrão na expressão precedente, são sempre menores que a unidade; assim, limitando-nos aos dois primeiros termos, que são os mais consideraveis, se vê que o valor da equação do tempo sempre he menor do que a soma delles, ou menor do que 17'32'' de tempo; resultado conforme ao que já obtivemos precedentemente por outro methodo mais elementar.

A mesma fórmula mostra que o valor da equação do tempo depende da obliquidade da ecliptica, da excentricidade da orbita solar, e do lugar do apogeo. Por tanto he sujeito a variações seculares, dependentes das que estes elementos soffrem.

NOTA VI.

Sobre o calculo das refracções atmosfericas.

AS experiencias, que se tem feito sobre a refracção, mostrão que ella he devida a huma acção propria, que os córpos exercem sobre a luz. Esta acção he sómente sensivel em pequenas distancias, e he inteiramente analoga ao que os chymicos chamão *affinidade*. Ainda que não sabemos se com effeito os córpos attrahem, ou repellem a luz, os phenomenos acontecem, como se tivessem lugar essas attracções e repulsões. Ora, não he mistér mais para a physica, que não examina a natureza das causas, mas dos seus effeitos, e isto basta tambem ao calculo, que considerando esta attracção como huma força, que os córpos exercitão, determina os movimentos que ella deve produzir nas particulas da luz.

Deste só principio se deduzem todas as leis da refracção e da reflexão na superficie dos córpos. Veja o Tratado de Physica tom. II.

Para o applicar ás refracções atmosfericas, cumpre notar que a densidade do ar em toda a parte he sensivelmente a mesma, nas mesmas alturas acima do nivel do mar. Logo a atmosfera se póde considerar como composta de huma infinidade de camadas esfericas e concentricas, cuja densidade vai diminuindo desde a superficie daterra. Quando hum raio luminoso entra em huma destas camadas, a força lateral, que tende a desvia-lo do seu caminho, obra igualmente de todos os lados; logo deve attrahi-lo para o centro da camada, que tambem he o da terra. Assim o raio luminoso desde a sua entrada na atmosfera, he continuamente follicitado por huma força attractiva, que o desvia para o centro.

Daqui se segue, primeiro, que o caminho do raio fica todo em hum plano vertical conduzido pelo astro e pelo olho do observador; porque semelhante plano passa tambem pelo centro da terra, e corta em duas partes iguaes todas as camadas esfericas, que atravessa o raio luminoso. Logo este raio nunca póde affastar-se daquelle plano, porque não ha razão para que saia antes de hum lado do que de outro. Logo nunca póde inflectir, curvando-se para a superficie da terra.

Para determinar a lei desta inflexão, consideremos o raio já entrado na atmosfera e passando de huma camada de ar á seguinte. Então acha-se sollicitado por duas forças contrarias, a attracção da camada de que sahe, e a da camada em que entra. Esta he mais forte, porque he mais densa. O raio sollicitado por estas attracções oppostas se move em virtude da sua differença, no sentido da mais forte, e inflecte para a terra.

Ora, supponda conhecida a densidade do ar nestas duas camadas, se póde calcular, pelos principios da mechanica, a desviação, que o raio deve soffrer. A somma de todos estes desarranjos desde o cimo da atmosfera até á superficie da terra, produz a deviação total do raio luminoso, e fórma o valor inteiro da refracção.

Para calcular exactamente esta somma, seria necessario saber de que modo cresce a densidade do ar quando se approxima á terra. Isto parece summamente difficil e até impossivel, á vista da multidão das causas variaveis, que podem concorrer para este effeito.

Porém felizmente este conhecimento não he absolutamente indispensavel, senão quando o astro está perto do horizonte, e sem elle se póde conseguir hum resultado muito exacto, quando a altura apparente excede a 10 ou 12 gráos. Então os raios lu-

minoſos encontrão menos obliquamente as diverſas camadas da atmosfera ; elles tem de atraveſſar menor extensão de ar ; e como a altura da atmosfera no ſentido vertical , he muito pequena , e a velocidade da luz he muito grande , eſtas circunſtancias concorrem para ſimplificar o calculo , e diminuir a refracção. Com effeito , introduzindo-as nas fórmulas , ſe vê que a deviação total do raio luminoſo , não depende dos gráos , por que a denſidade do ar augmenta , quando ſe aviſinha á terra , mas ſómente do augmento total da meſma denſidade , iſto he , da preſsão da atmosfera e da temperatura , no lugar em que ſe faz a obſervação : circunſtancias , que indica o eſtado do barometro , e do thermometro. Eſte reſultado he independente de qualquer hypotheſe da conſtituição da atmosfera.

A fórmula , que exprime as leis da refracção , neſtas circunſtancias , he muito ſimples , e ſe póde enunciar da maneira ſeguinte : *A refracção he proporcional á tangente da diſtancia apparente do aſtro ao zenith , diminuida de hum certo multiplo da refracção.* Seja r a refracção , z a diſtancia apparente , teremos

$$r = m\,(\text{tang.}\ z - nr) ,$$

ſendo m e n duas conſtantes.

Quando o raio luminoſo faz com o horizonte hum angulo menor de 11.°, he indiſpenſavel introduzir no calculo a lei que ſegue a denſidade do ar, quando paſſa de huma a outra camada. Então a refracção total depende do eſtado deſtas camadas ; iſto he , da ſua denſidade e da ſua temperatura , nos pontos , em que as atraveſſa o raio luminoſo. Neſte raio , approximando-ſe obliquamente á ſuperficie terreſtre , influem as camadas inferiores , em lugares diſtantes daquelle , em que ſe faz a obſervação. Ora , naquellas baixas regiões , o eſtado do ar varía de contínuo , por cauſas , que o obſervador não póde prever , nem appreciar. Por eſta razão , as refracções dos aſtros , que

IGF = incid.
HGI = refrac = Q
$p = \frac{\text{sen } FGI}{\text{sen } HGI} = \frac{\text{sen}(H}{\text{sen}}$
$= \frac{\text{sen}(Q+r)}{\text{sen } Q}$
$GOZ = OGC + GCI$
$z = Q + c$
$p = \frac{\text{sen}((z-c)}{\text{sen}(z-c}$
$p : 1 :: \text{sen}((z-c)+r) :: s : s'$
$p+1 : p-1 : s+s' :$
$\frac{p+1}{p-1} = \frac{s+s'}{s-s'} =$
$= \frac{\text{sen}((z-c)+r)+1}{\text{sen}((z-c)+r)-}$
$= \frac{tg\,\frac{1}{2}(2(z-c)+}{tg\,\frac{1}{2}r}$
$= \frac{tg((z-c)+\frac{1}{2}r)}{tg\,\frac{1}{2}r}$
$\frac{p+1}{p-1} = m =$
$-c + \frac{1}{2}r = nr$

$tg\,\frac{1}{2}r = \frac{1}{m}\,tg(z-c+\frac{1}{2}r) = \frac{1}{m}\,tg(z-nr)$

$\frac{1}{2}r = \frac{1}{m}\,tg(z-nr)$ como a refracção he muito pequena tomei $tg\,\frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r$. substituindo pelo coeficiente $\frac{1}{m} = m'$ vem $r = m(tg.(z-nr))$

eſtão muito perto do horizonte, são muito difficeis de determinar. Para o conſeguirmos, fomos obrigados a formar, ácerca da conſtituição da atmosfera, hypotheſes mais ou menos veriſimeis, e procuramos conciliar por eſtas hypotheſes as refracções obſervadas. Porém, apesar de todos os esforços feitos até o preſente, ainda reſta alguma incerteza a eſte reſpeito. Por iſſo todas as obſervações aſtronomicas, que não tem por objecto a refracção, ſe fazem de 12° de altura até o zenith.

Tornemos á fórmula

$$r = m\,(tang.\,z - nr)\;;$$

na qual m e n são dois coefficientes conſtantes, e vejamos como podemos uſar della para conſtruirmos taboas de refracção, quando são conhecidos os coefficientes. Para iſto deſembaracemos r; mas notaremos primeiro que eſta quantidade devendo ſer expreſſa em minutos e ſegundos de gráo; m deve ſer expreſſo da meſma maneira, porque $tang.\,(z - nr)$ marca huma relação, e por conſequencia hum numero abſtracto. Para não eſquecer eſta advertencia, repreſentemos por R o valor do raio das taboas, expreſſo em gráos. Elle he igual a 57°,2957795. Façamos mais

$$m = \frac{kR}{n}$$

ſendo k hum coefficiente conſtante, que repreſenta hum numero abſtracto, bem como n, a fórmula precedente ficará

$$\frac{nr}{R} = k\,tang.\,(z - nr)$$

como a refracção r he ſempre muito pequena; e igualmente a correcção nr, podemos, ſem erro ſenſivel, ſubſtituir á razão $\frac{nr}{R}$ a tangente trigonometrica do arco nr, o que dá

$$tang.\, nr = k\, tang.\, (z - nr).$$

Ora

$$nr = \frac{z}{2} - \left[\frac{z}{2} - nr\right],\quad z - nr = \frac{z}{2} + \left[\frac{z}{2} - nr\right].$$

Por conſequencia

$$\frac{Tang.\, nr}{Tang.\, (z - nr)} = \frac{tang.\left[\frac{z}{2} - \left(\frac{z}{2} - nr\right)\right]}{tang.\left[\frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2} - nr\right)\right]} = \frac{ſen.\, z - ſen.\, (z - 2nr)}{ſen.\, z + ſen.\, (z - 2nr)};$$

e a equação precedente fica

$$\frac{ſen.\, z - ſen.\, (z - 2nr)}{ſen.\, z + ſen.\, (z - 2nr)} = k,$$

donde ſe tira

$$ſen.\, (z - 2nr) = \frac{1-k}{1+k} ſen.\, z.$$

O uſo deſta formula ſerá facil, apenas se conhecerem as conſtantes k e n; porque ſendo dada pela obſervação a diſtancia apparente z, calcular-ſe-ha o ſegundo membro da equação precedente, e eſte ſerá o valor de $ſen.\, (z - 2nr)$. Daqui ſe concluirá o valor do arco $z - 2nr$, que ſubtrahido de z, dará $2nr$, e por conſequencia r. Calculando dantemão eſtes valores para todos os gráos de altura apparente de 12º até o zenith, teremos taboas de refracções.

Ha muitos modos de determinar os coefficientes m e n; o mais directo e o mais simples seria deduzi-los da theoria, mas para isto seria mister que tivessemos ácerca do pezo do ar, e da sua força refractiva, muitos dados que ainda nos faltão. Entretanto a theoria faz conhecer o valor do coefficiente n, que se póde tomar igual a 4. De sorte que resta sómente achar o valor de m.

Poder-se-hia determinar por observações das estrellas circumpolares; isto he, pela condição que as alturas meridianas destas estrellas, corretas da refracção, devem todas dar a mesma distancia do pólo ao zenith.

Podem-se empregar para este objecto as refracções achadas directamente pela experiencia, comparando o lugar apparente dos astros com o seu lugar real. Duas observações deste genero bastão para determinar as duas constantes m e n.

Porém consegue-se maior exactidão combinando assim grande numero de observações, e tomando para m e n valores medios. *Delambre* achou desta maneira o valor de m igual a $1'0'',6$, suppondo a temperatura em zero, e o barometro em 28 pés 0,6 polegadas Francezas.

Este resultado se deduz de huma multidão de observações, que *Piazzi* havia feito em Palermo. Daqui se conclue

$$\frac{1-k}{1+k}=\frac{5722844}{5736312}=0{,}997652.$$

Passemos agora ás correcções, que exige o estado do ar. Achou-se por experiencia que as refracções, sendo iguaes as de mais cousas, são proporcionaes á densidade do ar. Ora esta densidade póde variar por duas causas, pela pressão da atmosfera, e pela temperatura.

Seja V hum volume de ar ſujeito a huma preſsão conſtante, e cuja denſidade neſſe eſtado he repreſentada pela unidade. Se a temperatura creſcer ou diminuir, hum numero t de gráos do thermometro, o volume V variará proporcionalmente, e ſe converterá em $V + Vat$, ou $V(1 + at)$, ſendo a hum coefficiente conſtante, que repreſenta a dilatação para hum gráo. Como as denſidades eſtão na razão inverſa dos volumes, a do ar no eſtado variado ſerá

$$\frac{V}{V(1+at)} \text{ ou ſimplesmente } \frac{1}{1+at}.$$

De mais, eſta denſidade, em igual temperatura, he proporcional á preſsão da atmosfera, indicada pelo eſtado do barometro. Logo he neceſſario fazer variar o eſtado precedente na razão da altura obſervada do barometro para 28 pés, 0,6 pol., que he aquella relativamente á qual ſe calculárão as taboas.

Seja A eſta altura expreſſa em pollegadas, a expreſsão da denſidade do ar, que lhe correſponde, ſerá

$$\frac{A}{28,05(1+at)}.$$

Aſſim chamando r á refracção calculada na temperatura do gelo derretido, e em huma preſsão igual a 28,05 pol., a refracção r' em qualquer outro eſtado do ar he

$$r' = \frac{A}{28,05(1+at)}r.$$

O coefficiente a he muito pequeno, e ſegundo as experiencias ſe avalia em $\frac{1}{290}$ ou 0,004. Vê-ſe por eſta fórmula que a refracção diminue á medida que t augmenta, iſto he, á medida que ſe eleva a temperatura. Se por exemplo ſuppozermos $t = 11^{\circ},25$, $h = 28,05$ pol. que são os valores adoptados no *conhecimento dos tempos*, o coefficiente de r ſerá $\frac{1}{1+\frac{1}{20}}$, que ſe reduz a $1 - \frac{1}{20}$ effeituando a divizão, e deſprezando as potencias ſuperiores de $\frac{1}{20}$ como fracções muito pequenas. Donde ſe vê que as noſſas refracções ſe dever diminuir da vigeſima parte do ſeu valor para ter as que convém á temperatura de $11^{\circ},25$. Com eſta reducção ſe acharáõ reſultados mais fortes do que os do conhecimento dos tempos, porque alli ſe uſa da taboa de *Bradley*, que hoje ſe conhece que dá as refracções hum tanto fracas.

Até aqui havemos ſó conſiderado alturas acima de 11°. Abaixo deſte termo as refracções creſcem rapidamente, aviſinhando-ſe ao horizonte. Vê-ſe claramente na refracção horizontal, que tem por valor medio $34'50''$. Neſtas pequenas alturas as refracções são muito variaveis, e para as determinar são neceſſarios todos os recurſos da Phyſica e da analyſe.

INDICE.

LIVRO I.

PRINCIPIOS.

LIVRO II.

Dos Córpos Celestes.

APPENDICE AO LIVRO II.

Das praticas mais necessarias.

LIVRO III.

Dos movimentos dos Planetas.

LIVRO IV.

Dos Eclipses.

APPENDICE I.

APPENDICE II.

NOTAS.

008170

308/

800.–

11/58

u/5/1