(*) MEMORIA

Em que se pertende dar a Solução de hum Programma da Academia Real das Sciencias de Lisboa.

Por Mattheus Valente do Couto.

PROGRAMMA

DE

ANALYSE PARA MAIO DE 1811.

Comparação das formulas tanto finitas, como de variações finitas, e infinitesimas dos triangulos esphericos, e rectilineos; a fim de mostrar até que gráo de aproximação se podem huns tomar pelos outros, por meio do exame analytico dos erros, que resultem desta supposição.

INTRODUCÇÃO.

Antes de fazer a comparação da Trigonometria spherica com a rectilinea faz-se preciso lembrar alguns principios; e são os seguintes:

1. Denote x hum arco de circulo rectificado; $(x)^\circ$ o numero de gráos desse arco; $(x)'$ o numero de minutos; $(x)''$ o numero de segundos: e como he $\varpi = 3{,}1415926535 89$ a semicircumferencia rectificada em partes do raio igual a unidade; será $x = 0{,}017453286\ (x)^\circ$, ou $x = 0{,}000290888\ (x)'$, ou $x = 0{,}000004848\ (x)''$; como he facil de ver.

2.

(*) Premiada na Assemblea Publica de 24 de Junho de 1812.

2. Suppondo Sen. $x = x + Ax^2 + Bx^3 + \&c.$, será Sen. $2x = 2x + 4Ax^2 + 8Bx^3 + \&c.$; valores, que, substituidos na equação Sen.$^2\, 2x = 4$ Sen.$^2 x - 4$ Sen.$^4 x$, dão pelo methodo dos coefficientes indeterminados a serie seguinte (α);

$$\left.\begin{aligned} (\alpha)\ldots\ \text{Sen.}\, x &= x - \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}x^5 - \&c. \\ (\beta)\ldots\ \text{Cos.}\, x &= 1 - \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1.2.3.4}x^4 - \&c. \\ (\gamma)\ldots\ \text{Tg.}\, x &= x + \frac{1}{1.3}x^3 + \frac{2}{1.3.5}x^5 + \&c. \\ (\delta)\ldots\ \text{Cot.}\, x &= \frac{1}{x} - \frac{1}{1.3}x - \frac{1}{1.3.3.5}x^3 - \&c. \end{aligned}\right\} *$$

Para achar a serie (β) basta escrever na equação Cos. $x = 1 - 2$ Sen.$^2 \frac{1}{2}x$ o valor de Sen. $\frac{1}{2}x$ deduzido da serie (α). Divida-se agora (α) por (β) para ter (γ); e ao depois divida-se (β) por (α) para ter (δ).

3. Suppondo $x =$ Sen. $x + A$ Sen.$^2 x + B$ Sen.$^3 x +$ &c.; achar-se-ha pela (α) a seguinte (ε):

$$(\varepsilon)\ldots\ x = \text{Sen.}\, x + \frac{1}{1.2.3.}\text{Sen.}^3 x + \frac{3}{1.2.4.5}\text{Sen.}^5 x + \&c.$$

$$(\xi)\ldots\ x = \tfrac{1}{2}\varpi - \text{Cos.}\, x - \frac{1}{1.2.3}\text{Cos.}^3 x - \frac{3}{1.2.4.5}\text{Cos.}^5 x - \&c.$$

$$(\eta)\ldots\ x = \text{Tg.}\, x - \tfrac{1}{3}\text{Tg.}^3 x + \tfrac{1}{5}\text{Tg.}^5 x + \&c.$$

$$(\theta)\ldots\ x = \tfrac{1}{2}\varpi - \text{Cot.}\, x + \tfrac{1}{3}\text{Cot.}^3 x - \tfrac{1}{5}\text{Cot.}^5 x + \&c.$$

Para achar a serie (ξ) basta escrever $\frac{1}{2}\varpi - x$ em lugar de x na serie (ε). Pelo mesmo estilo (suppondo $x =$ tg. $x + A\, tg.^2 x +$ &c.) se acharão as duas (η) e (θ).

4.

(*) Para reduzir hum arco z, cujo raio $= r$, a outro arco x, cujo raio seja $= 1$, faremos $x = \frac{z}{r}$: logo será Sen. $(x) = \left(\frac{z}{r}\right) - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{z}{r}\right)^3 + \&c.$: e assim a respeito das outras formulas.

4. A letra δ posta antes de qualquer funcção variavel denotará sempre a differença entre o estado variado, e o primitivo dessa funcção: e por isso será $y' - y = \delta y$; $x' - x = \delta x$; $(y + \delta y)(x + \delta x) - yx = \delta(yx)$; $\frac{x + \delta x}{y + \delta y} - \frac{x}{y} = \delta\left(\frac{x}{y}\right)$.

A letra Σ posta antes de qualquer funcção variavel denotará sempre a somma do estado variado e o primitivo dessa funcção: e por isso será

$y' + y = \Sigma y$; $x' + x = \Sigma x$; $(y + \delta y)(x + \delta x) + yx = \Sigma(yx)$; $\frac{x + \delta x}{y + \delta y} + \frac{x}{y} = \Sigma\left(\frac{x}{y}\right)$. Isto posto: Para achar as differenças finitas das funcções das linhas trigonometricas, teremos as formulas seguintes:

(I).. $\delta(xy) = \frac{1}{2}(\delta x . \Sigma y + \delta y . \Sigma x)$	(III).. $\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2} . \frac{\delta x . \Sigma y - \delta y \Sigma x}{(y + \delta y) y}$
(II).. $\Sigma(xy) = \frac{1}{2}(\Sigma x . \Sigma y + \delta y . \delta x)$	(IV).. $\Sigma\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2} . \frac{\Sigma x . \Sigma y - \delta x \delta y}{(y + \delta y) y}$

Como facilmente se verifica, pondo $\Sigma y = 2y + \delta y$; $\Sigma x = 2x + \delta x$; &c.

Applicações.

5. Seja $y = \text{Cos.}\, a$, $x = \text{Sen.}\, a$; será $y' = \text{Cos.}\,(a + \delta a)$, $x' = \text{Sen.}\,(a + \delta a)$; e logo (pelas formulas conhecidas da somma, e da differença dos Senos, e Cosenos de dous arcos) teremos facilmente as seguintes:

(i).. $\delta\, \text{Sen.}\, a = 2\, \text{Sen.}\, \frac{1}{2}\delta a . \text{Cos.}(a + \frac{1}{2}\delta a)$	$\Sigma\, \text{Sen.}\, a = 2 . \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\delta a . \text{Sen.}\,(a + \frac{1}{2}\delta a)$
(k).. $\delta\, \text{Cos.}\, a = -2\, \text{Sen}\, \frac{1}{2}\delta a . \text{Sen.}(a + \frac{1}{2}\delta a)$	$\Sigma\, \text{Cos.}\, a = 2\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\delta a . \text{Cos.}\,(a + \frac{1}{2}\delta a)$

6. Por estas fórmulas do N. 5.; e pelas fórmulas (III.) e (IV.) do N. 4., acharemos (por ser tg. $a = \frac{\text{Sen.}\, a}{\text{Cos.}\, a}$, e Cot. $a = \frac{\text{Cos.}\, a}{\text{Sen.}\, a}$) as formulas seguintes:

$(\lambda) \ldots \delta\, \text{tg.}\, a = \dfrac{2\ \text{Sen.} \frac{1}{2} \delta a . \text{Cos.} \frac{1}{2} \delta a}{\text{Cos.}\ (a + \delta a).\ \text{Cos.}\ a}$ | $\Sigma\, \text{tg.}\, a = \dfrac{2 . \text{Sen.} (a + \frac{1}{2} \delta a)\ \text{Cos.} (a + \frac{1}{2} \delta a)}{\text{Cos.}\ (a + \delta a).\ \text{Cos.}\ a}$

$(\mu) \ldots \delta\, \text{Cot.}\, a = \dfrac{-\ 2\,\text{Sen.} \frac{1}{2} \delta a . \text{Cos.} \frac{1}{2} \delta a}{\text{Sen.}\ (a + \delta a) . \text{Sen.}\ a}$ | $\Sigma\, \text{Cot.}\, a = \dfrac{2 . \text{Sen.} (a + \frac{1}{2} \delta a) . \text{Cos.} (a + \frac{1}{2} \delta a)}{\text{Sen.}\ (a + \delta a).\ \text{Sen.}\ a}$

7. Pelas formulas (I.) e (II.) do N°. (4) teremos as formulas seguintes:

$\delta\, (\text{Sen.}\ a\ \text{Cos.}\ b) = 2\ \text{Sen.}\ \frac{1}{2}\ \delta a .\ \text{Cos.}\ (a + \frac{1}{2}\ \delta a).\ \text{Cos.} \frac{1}{2} \delta b$ $\text{Cos.}\ (b + \frac{1}{2} \delta b) - 2\ \text{Sen.}\ \frac{1}{2}\ \delta b.\ \text{Sen.}\ (b + \frac{1}{2}\ \delta b)\ \text{Cos.} \frac{1}{2} \delta a.$ $\text{Sen.}\ (a + \frac{1}{2}\ \delta a)$;

$\Sigma\ (\text{Sen.}\ a.\ \text{Cos.}\ b) = 2\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ \delta a . \text{Sen.}\ (a + \frac{1}{2} \delta a) . \text{Cos.} \frac{1}{2} \delta b.$ $\text{Cos.}\ (b + \frac{1}{2}\ \delta b) - 2\ \text{Sen.}\ \frac{1}{2}\ \delta b.\ \text{Sen.}\ (b + \frac{1}{2}\ \delta b) . \text{Sen.}\ \frac{1}{2}\ \delta a.$ $\text{Cos.}\ (a + \frac{1}{2}\ \delta a)$.

8. Sendo a e B constantes, pede-se a somma da equação $\text{Sen.}\ b = \dfrac{\text{Sen.}\ a.\ \text{Sen.}\ B}{\text{Sen.}\ A}$, isto he, pede-se a expressão de Σ $\text{Sen.}\ b = \Sigma \dfrac{\text{Sen.}\ a\ \text{Sen.}\ B}{\text{Sen.}\ A}$; achar-se-ha pela (IV.) do (N.4) a seguinte $2\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ \delta b.\ \text{Sen.}\ (b + \frac{1}{2}\ \delta b)$ $= \dfrac{2\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ \delta A.\ \text{Sen.}\ (A + \frac{1}{2}\ \delta A) . \text{Sen.}\ a\ \text{Sen.}\ B}{\text{Sen.}\ A.\ \text{Sen.}\ (A + \delta A)}$; mas he $\text{Sen.}\ a . \text{Sen.}\ B = \text{Sen.}\ b.\ \text{Sen.}\ A$, logo he $\text{Sen.}\ (b + \frac{1}{2}\ \delta b)$ $= \dfrac{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ \delta A.\ \text{Sen.}\ (A + \frac{1}{2}\ \delta A) . \text{Sen.}\ b.}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ \delta b.\ \text{Sen.}\ (A + \delta A)}$.

9. Sendo a e B constantes, pede-se a somma da equação $\text{Cot.}\ a.\ \text{Sen.}\ c = \text{Sen.}\ B.\ \text{Cot.}\ A + \text{Cos.}\ c.\ \text{Cos.}\ B$; achar-se-ha pelas formulas do (N.° 4.) a seguinte . . . $\text{Sen.}\ (c + \frac{1}{2}\ \delta c) . \text{Cos.}\ a - \text{Cos.}\ (c + \frac{1}{2}\ \delta c)\ \text{Sen.}\ a\ \text{Cos.}\ B$ $= \dfrac{\text{Sen.}\ b . \text{Sen.}\ (A + \frac{1}{2} \delta A) . \text{Cos.}\ (A + \frac{1}{2} \delta A)}{\text{Cos.} \frac{1}{2} \delta c . \text{Sen.}\ (A + \delta A)}$.

10.

10. Sendo a e B constantes, pede-se a somma da equação Cos. b = Sen. a Sen. c. Cos. B + Cos. a. Cos. c; achar-se-há do mesmo modo, que acima, a seguinte ... Cos. $(c + \frac{1}{2}\delta c)$. Cos. a + Sen. $(c + \frac{1}{2}\delta c)$ Sen. a Cos. B

$$= \frac{\text{Cos. } \frac{1}{2}\delta b. \text{ Cos. } (b + \frac{1}{2}\delta b)}{\text{Cos. } \frac{1}{2}\delta c}.$$

11. Por ser Cot. $a = \frac{\text{Cos. } a}{\text{Sen. } a}$; a equação do (N.°9.) se muda em Sen.b. Cos.A = Cos.a Sen. c — Sen. a. Cos. c. Cos.B; e tomando a somma desta equação (sendo b e B constantes) teremos a seguinte

$$\text{Sen. } b. \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\delta A. \text{ Cos. } (A + \tfrac{1}{2}\delta A) =$$

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\delta a. \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\delta c \begin{Bmatrix} \text{Cos. } (a + \frac{1}{2}\delta a) \text{ Sen. } (c + \frac{1}{2}\delta c) \\ - \text{Sen.}(a + \frac{1}{2}\delta a)\text{Cos.}(c + \frac{1}{2}\delta c)\text{Cos.} B \end{Bmatrix}$$

$$- \text{Sen. } \tfrac{1}{2}\delta a. \text{ Sen. } \tfrac{1}{2}\delta c \begin{Bmatrix} \text{Sen. } (a + \frac{1}{2}\delta a) \text{ Cos. } (c + \frac{1}{2}\delta c) \\ - \text{Cos.}(a + \frac{1}{2}\delta a)\text{Sen.}(c + \frac{1}{2}\delta c)\text{Cos.} B \end{Bmatrix}.$$

Scholios.

12. Pelas series do (N.°2.) teremos (sendo $(x)' = 72',5$ ou $x = 0,0211$) as seguintes fórmulas exactas até segundos de gráo.

Sen. $x = x$; Cos. $x = 1 - \frac{1}{2}x^2$; tg. $x = x$; Cot. $x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x$.

Sendo $(x)' = 7',5$ ou $x = 0,00219$; será Sen. $x = x$; Cos. $x = 1$; tg. $x = x$; Cot. $x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x$.

Sendo $(x)'' = 1'',5$ ou $x = 0,0000072$; será Sen. $x = x$; Cos. $x = 1$; tg. $= x$; Cot. $x = \frac{1}{x}$.

Donde se segue, que os Senos, e tangentes de arcos (não maiores que $72',5$) são iguaes aos mesmos arcos exactamente até segundos de gráo; e que os Cosenos de arcos (não maiores que $7',5$) são iguaes ao raio: porém para que huma Cotagente seja igual ao raio dividido pelo arco, he preciso, que este arco não seja $> 1'',5$.

13. Porém se nas formulas (i) e (k) do (N. 5.) suppozermos Cos. $(a + \frac{1}{2}\delta a)$ = Cos. a; e Sen. $(a + \frac{1}{2}\delta a)$ = Sen. a; e quizermos ter estas equações exactas até segundos de grão, deve neste caso ser Cos. $\frac{1}{2}\delta a = 1$, Sen. $\frac{1}{2}\delta a = \frac{1}{2}\delta a$; e tambem $\frac{1}{2}\delta a$ Sen. $a < 0'',5$; e $\frac{1}{2}\delta a$. Cos. $a < 0'',5$ para qualquer valor de a: o que daria δ Sen. $a = \delta a$. Cos. a, δ Cos. $a = -\delta a$. Sen. a, que são as differenciaes conhecidas do Seno, e Coseno.

Advertencia.

Ainda que para satisfazer as condições de ser $\frac{1}{2}\delta a$ Cos. $a < 0'',5$, e $\frac{1}{2}\delta a$ Sen. $a < 0'',5$, he precizo, que seja em geral $\frac{1}{2}\delta a < 0'',5$ para qualquer valor do arco a; e que por isso pareça, que estas formulas differenciaes, e as que forem assim derivadas não poderião servir de modo algum para achar a variação ou differença de huma qualquer dessas grandezas, quando forem dadas as variações das outras, mas que sómente poderião mostrar a relação entre duas variações, que se reduzissem a cifra, isto he, o valor de $\frac{0}{0}$ neste caso; comtudo as differenciaes do Seno, e Coseno acima achadas são exactas, em quanto não for $\delta a > 7',5$: com effeito, se nas fórmulas (i) e (k) do (N.° 5) substituirmos em lugar de Sen. $(a + \frac{1}{2}\delta a)$, e de Cos. $(a + \frac{1}{2}\delta a)$ os seus desenvolvimentos Sen. a Cos. $\frac{1}{2}\delta a$ + Sen. $\frac{1}{2}\delta a$. Cos. a; e Cos. a. Cos. $\frac{1}{2}\delta a$ — Sen. a Sen. $\frac{1}{2}\delta a$, e ao depois substituirmos os valores de Sen. $\frac{1}{2}\delta a$, e Cos. $\frac{1}{2}\delta a$ dados pelas series (α) e ($\mathfrak{C}$) do (N.° 2) acharemos as seguintes:

$$\delta \text{ Sen. } a. = \delta a. \text{ Cos. } a - \tfrac{1}{2}\delta a^2 \text{ Sen. } a - \frac{1}{2.3}\delta a^3 \text{ Cos. } a + \&c.$$

$$\delta \text{ Cos. } a = -\delta a \text{ Sen. } a + \tfrac{1}{2}\delta a^2 \text{ Cos. } a - \frac{1}{2.3}\delta a^3 \text{ Sen. } a - \&c.$$

as

as quaes mostrão facilmente, que (em quanto não for $\delta a >$ $7',5$) será exactamente até segundos de gráo δ Sen. $a = \delta a$. Cos. a, e δ Cos. $a = - \delta a$. Sen. a : mas se o valor de δa esistir entre $7',5$ e $72',5$ he preciso então aproveitar o termo em que entra δa^2, para ter approximação até segundos: e assim se discorrerá em outros casos similhantes, segundo o gráo de aproximação, que se quizer.