BREVE
TRATADO
DE
GEOMETRIA SPHERICA,

POR

FRANCISCO VILLELA BARBOSA;
SOCIO DA
ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS:

EM ADDITAMENTO AOS SEUS ELEMENTOS
DE GEOMETRIA.

LISBOA
NA TYPOGRAFIA DA MESMA ACADEMIA.
ANNO 1817.
Com licença de *SUA MAGESTADE.*

ARTIGO

EXTRAHIDO DAS ACTAS

DA

ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS:

DA

SESSÃO DE 11 DE DEZEMBRO DE 1816.

Determina a Academia Real das Sciencias, que o Breve Tratado de Geometria Spherica, *composto pelo seu Socio Francisco Villela Barbosa, se imprima á custa da Academia, e debaixo do seu privilegio. Secretaria da Academia em* 18 *de Dezembro de* 1816.

José Bonifacio de Andrada e Silva,

Secretario da Academia.

ADDITAMENTO.

1. TODA a secção feita em qualquer sphera por hum plano, he circulo: e o maximo he o formado pelo plano, que passa pelo centro da sphera. (247. Geom.)

2. *Coroll.* 1.° Quaesquer dous circulos max. cortão-se reciprocamente em duas partes iguaes. Com effeito a sua intersecção passando pelo centro da sphera, he diametro de qualquer delles. (A figura, que na superficie da sphera, formão então duas semi-circunferencias, chamaremos *lunula spherica.*)

3. *Coroll.* 2.° Pelo que, dous arcos de circ. max. menores cada hum, que huma semi-circunferencia, não podem ter dous pontos communs, sem que inteiramente se confundão.

4. Da Demonstração do mesmo n.° 247 se collige que o diametro da sphera, que he perpendicular a hum de seus circulos, passa pelo centro desse circulo.

Es-

Este diametro chama-se *eixo* do circulo : e os extremos do mesmo diametro *polos* do mesmo circulo.

5. *Coroll.* Logo qualquer ponto do *eixo* de hum circulo dista igualmente de todos os pontos da circunferencia desse circulo (196. Geom.). Se o circulo he max. , a distancia dos seus polos á circunferencia he = corda do arco de 90.° do circ. max.

Dos angulos sphericos.

6. O angulo formado por dous arcos de circ. max. na superficie da sphera , chama-se *angulo spherico.* Continuados os lados do angulo até concorrerem , formarão huma lunula sph.

7. THEOR. *Se os lados de hum angulo sph. forem de 90.° cada hum ; o seu vertice será polo do circulo max. , que passar pelos extremos dos ditos lados.*

Seja , fig. 1 , o angulo sph. *APB* : e sejão *AP* , *PB* de 90.° cada hum : digo que o vertice *P* he polo do circ. max. , de que he arco *AB*.

Demonstr. Seja *C* o centro da sphera :

ra : tirem-se os raios CP, CA, CB. Pois são AP, PB de 90.° cada hum; serão rectos os angulos ACP, PCB: e por conseguinte será PC perpendicular no centro C ás rectas AC, BC: mas he por isso PC tambem perpendicular no dito centro ao plano do circulo CAB (192. Geom.): logo será P polo do circulo CAB (4).

8. PROBL. *Dado hum arco de circulo na superficie de huma sphera, achar hum dos polos desse circulo.*

Seja, fig. 2, AB o arco.

Solução. Ache-se o diametro do circulo, a que pertence esse arco, como fica dito no n.° 249. Geom. Seja este $A'B'$: inscreva-se no circulo max. $A'B'H$: tire-se o diametro PH perpendicular á $A'B'$: e com o intervallo $A'P$, fazendo centro em A, e depois em outro ponto E do mesmo arco, que não diste de A mais do dito intervallo $A'P$, se descrevão sobre o segmento spherico menor dous arcos, os quaes se cortarão em hum ponto P: digo que este ponto he polo do circulo, de que he arco AB.

Se o arco dado for de circ. max., tomar-se-ha entre as pontas do compasso só a abertura, ou corda do arco de 90.° do circ. max.

9. *Schol.* Fica pois manifesto, o que se fará, se por dous pontos dados na superficie da sphera, quizermos descrever hum arco de circulo de diametro dado; com tanto que este não exceda o da sphera; nem seja menor que a corda do dito arco: ou se tratarmos de continuar qualquer arco dado: ou se pedirmos, que por tres pontos dados na dita superficie se faça passar huma circunferencia.

N. B. As figuras, que daqui em diante considerarmos, se devem entender descriptas na superficie da mesma sphera.

10. THEOR. *Se em duas lunulas sph. de hum hemispherio, forem iguaes os arcos de circ. max. descriptos dos vertices dos seus angulos, como polos, e interceptos pelos seus lados; serão iguaes os angulos; as áreas; e as lunulas. E se os arcos forem desiguaes; será maior o angulo, a área, e a lunula, pertencentes ao arco maior.*

Sejão, fig. 3, as lunulas sph. *ABCD*, *AECF*; e seja o arco *BD* = arco *EF*; des-

descriptos do vertice *A*; como polo: digo que o angulo sph. *BAD* he = angulo sph. *EAF*; a área *ABCDA* = área *AECFA*; e as lunulas iguaes.

Demonstr. Imagine-se applicado o arco *AB* sobre o arco *AE*; e sobreposta á lunula *ABCD* á lunula *AECF*: o ponto *B* cahirá em *E*, como equidistantes do ponto *A*: mas pela mesma razão todos os pontos do arco *BD* devem então cahir sobre o arco *EF*: logo o arco *BD* se ajustará sobre o arco *EF*; e o ponto *D* cahirá em *F*, por ser $BD = EF$ por hypothese. Logo tambem *AD* se ajustará sobre *AF*. (3); e o angulo *BAD* cobrirá exactamente o angulo *EAF*; e a área *ABCDA* a área *AECFA*. Logo &c.

A 2.ª parte demonstra-se, como a 2.ª do n.° 14. Geom.

11. *Coroll.* 1.° Reciprocamente: se em duas lunulas sph. de hum hemispherio, forem iguaes os angulos; serão iguaes os arcos de circ. max. descriptos dos seus vertices como polos, e interceptos pelos seus lados; as áreas; e as lunulas. E se os angulos forem desiguaes; será maior o arco, a área, e a lunula, pertencentes ao angulo maior.

12. *Coroll.* 2°. Pelo que, se dividir-

mos, em quantas partes iguaes quizermos, hum arco de circ. max. *BD* descripto do vertice de hum angulo sph. *BAD*, como polo, e intercepto pelos lados do dito angulo; e por cada hum dos pontos dessa divisão, e pelo dito vertice tirarmos outras tantas semi-circunferencias de circ. max.; ficará tambem o angulo proposto dividido em outras tantas partes iguaes entre si; e da mesma sorte a lunula sph., que aquelle determina. E se concluirá, (discorrendo como em o n.° 16. Geom.) que o arco *BD* he para o angulo sph. *BAD*, ou para a lunula *ABCD*; como qualquer numero daquellas partes de *BD* para o mesmo numero destoutras partes de *BAD*, ou da lunula *ABCD*.

13. Theor. *Os angulos sph. estão entre si, como os arcos de circ. max. descriptos dos seus vertices, como polos, e interceptos pelos seus lados; ou tambem como as áreas das lunulas sph., que elles determinão.*

Prova-se por hum raciocinio em tudo similhante ao do n.° 17 Geom.

14. *Coroll.* Pois os angulos sph. são pro-

proporcionaes aos arcos de circ. max. descriptos dos seus vertices, como polos; e interceptos pelos seus lados; segue-se que todo o angulo sph. pode ser representado pelo dito arco: e he neste sentido, que dizemos, que lhe serve de medida.

15. *Schol.* O angulo sph. pode tambem ser representado pelo angulo diedro formado pelos planos dos circ. max., de que os seus lados são arcos: ou tambem pelo angulo rectilineo, que mede a inclinação dos ditos planos.

Com effeito, fig. 1, o arco *AB*, que mede o angulo sph. *APB*, mede igualmente o angulo rectilineo *ACB*, que mede a inclinação dos planos *ACP*, *PCB*.

Assim os angulos sph. gozão de tódas as propriedades dos angulos diedros, ou dos angulos rectilineos. Por ex.

1.° Hum arco de circ. max., que encontra outro arco de circ. max. na superficie da sphera, faz com este, prolongado, se for necessario, dous angulos sph., cada hum de sua parte, que juntos valerão 180.°

Se estes angulos são iguaes, isto he; cada hum de 90.°, dizem-se *rectos*: e o arco incidente *perpendicular*, &c.

2.° Se hum arco de circ. max. for perpendicular a outro arco de circ. max.; tambem este o será a respeito daquelle.

3.° De hum mesmo ponto tomado em hum arco de circ. max. não se pode levantar mais do que hum arco de circ. max. perpendicular áquelloutro.

4.° Os angulos sph. verticalmente oppostos são iguaes &c.

16. PROBL. *No extremo de hum arco dado de circ. max. fazer hum angulo sph.* $=$ *outro angulo sph. dado.*

Seja, fig. 4, AB, o arco; A, o extremo; e bac, o angulo sph.

Solução. Do vertice a, como polo, descreva-se o arco de circ. max. bc: e do ponto A, como polo, descreva-se tambem o arco de circ. max. BD indefinido: tome-se $BC = bc$; e tire-se o arco de circ. max. AC (9): digo que o angulo sph. BAC he $= bac$; como se pedia.

17. PROBL. *Dividir hum angulo sph. em duas partes iguaes.*

Seja, fig. 5, o angulo sph. APB.

Solução. Do vertice P, como polo; des-

descreva-se o arco de circ. max. *AB*: divida-se pelo meio em *D*; e por *D*, e *P* tire-se o arco de circ. max. *DP*: digo que tenho dividido o angulo *APB* em duas partes iguaes *APD*, *DPB*. (14).

18. THEOR. *Se hum arco de circ. max. for perpendicular a outro arco de circ. max.; aquelle passará pelos polos deste: e reciprocamente.*

Seja, fig. 6, o arco de circ. max. *AB* perpendicular ao arco de circ. max. *AC*: digo que o arco *AB*, prolongado sendo necessario, passará pelos polos do circ. max. *AC*.

Demonstr. Tome-se em *AB*, continuado se for necessario, para huma, ou outra parte, a grandeza *AP* de 90.°: tome-se do mesmo modo *AC* de 90.°; e tire-se o arco *PC* de circ. max. Pois he por hypothese o angulo *BAC* recto; será *PC* de 90.° (14): mas tambem por construcção he *PA* de 90.°: logo *P* he polo de *AC*. (7).

Reciprocamente: se *P* he polo de *AC*; será *PA* perpendicular a *AC*. Com effeito o arco, que do ponto *A* se levantar perpendicular a *AC*, deve passar pelo po-

polo *P*, como acabamos de ver: logo este será o mesmo arco *PA*; visto ser o unico, que pelos dous pontos *A*, *P* se póde tirar (3).

19. *Coroll.* Sobre hum arco de circ. max., e de hum mesmo ponto tomado na superficie da sphera, que não seja polo desse arco, não se podem abaixar dous arcos perpendiculares, cada hum de seu circ. max. Porque então esses dous arcos perpendiculares, continuados, passarião pelos polos daquell'outro: e por conseguinte as circunferencias dos dous circ. max. se cortarião em tres pontos: o que he impossivel (7, e 44 Geom.)

20. *Schol.* Vê-se por tanto: que só por hum ponto, que fôr polo de hum circ. max., se podem conduzir innumeraveis arcos de circ. max. perpendiculares á circunferencia daquell'outro: e que por ponto, que não for polo, só póde passar huma circunferencia perpendicular.

21. Probl. *De hum ponto dado na superficie da sphera, e que não seja polo de hum arco de circ. max. dado, tirar hum arco de circ. max. perpendicular ao arco dado, continuado se for necessario.*

Se-

Seja, fig. 6, A, ou B, o ponto; e AC, o arco.

Solução. Ache-se hum dos polos desse arco (8); por ex. P: e por este, e pelo ponto dado A, ou B, tire-se o arco de circ. max. AP: digo que AP he o arco perpendicular pedido.

N. B. A respeito do ponto B, isto he, se o ponto dado não está no arco dado, ou no seu prolongamento; então qualquer dos dous BA, BD da semi-circunferencia ABD satisfaz ao Problema.

Dos triangulos sphericos.

22. A figura terminada na superficie da sphera por tres arcos de circ. max., chama-se *triangulo spherico*: e cada hum dos ditos arcos, *lado* do triangulo. Os triangulos sph. se distinguem, quanto aos seus lados, com os mesmos nomes, que demos aos triangulos rectilineos. (68. Geom.)

23. THEOR. *Em todo o triangulo sph. não ha lado* $= 180°$: *nem dous lados, cada hum* $> 180.°$

Seja, fig. 7, o triangulo sph. ABC.

De-

Demonstr. 1.° Se he possivel, seja hum dos lados, por ex. $BC = 180.°$: continue-se BA até concorrer em C com BC (2): será $BADC = 180.°$: e tambem $ADC = 180.°$: isto he $BADC = ADC$: absurdo manifesto.

Quanto á 2.ª parte; he evidente, que se houvesse dous lados, cada hum $>$ $180.°$; terião concorrido, e formado huma figura composta de huma lunula sph.

24. *Schol.* Os triangulos sph., que unicamente consideramos, são os que tem cada hum dos seus lados $< 180.°$. Não se julgue com tudo, que não possamos calcular aquelles triangulos sph., que tem, fig. 8, hum lado $AEC > 180.°$: por quanto o arco AC, que lhe falta para $360.°$, fórma com os outros dous lados hum triangulo ABC, pelo qual viremos no conhecimento do primeiro.

25. THEOR. *Em todo o triangulo sph. a somma de quaesquer dous lados he maior do que o terceiro: e a somma de todos menor que 360.°*

Seja, fig. 9, o triangulo sph. ABC: digo que a somma de quaesquer dous lados,

dos, por ex. $AB + BC > AC$: e $AB + BC + AC < 360.°$.

Demonstr. Seja D o centro da sphera: tirem-se os raios AD, BD, CD: será a somma dos angulos $ADB + CDB > ADC$: e $ADB + CDB + ADC < 360.°$ (231, 232 Geom.): mas he AB medida do angulo ADB; BC do angulo CDB; e AC do angulo ADC: logo tambem $AB + BC > AC$; e $AB + BC + AC < 360.°$.

26 THEOR. *Em todo o triangulo sph. isosceles o arco de circ. max., que divide pelo meio o angulo formado pelos lados iguaes, cahe perpendicularmente no meio do lado opposto.*

Seja, fig. 10, o triangulo sph. isosceles ABC, cujo angulo ABC formado pelos lados iguaes AB, BC está dividido em duas partes iguaes pelo arco de circ. max. BD: digo que este arco BD cahe perpendicularmente no meio do lado AC.

Demonstr. Produza-se AC até completar a circunferencia $ACGFA$: e AB, DB, CB até concorrerem no ponto E. Por ser $AB + BG = 180.°$: e tambem

$BG + GE = 180.^\circ$: será $AB = GE$. Do mesmo modo se mostrará $BD = HE$; e $GH = AD$. Logo temos que por ser $BC = AB$ por hypothese, he tambem $BC = GE$. Ora o angulo DBC he = angulo HBG (15) = angulo HEG: se ajustarmos o angulo DBC com o angulo HEG; o ponto D cahirá em H; e o ponto C em G: por conseguinte o arco CD tambem se ajustará sobre GH; e pois tem os mesmos extremos, será $CD = GH$: então o angulo BDC cobrirá exactamente o angulo EHG : logo será $BDC = EHG$: mas tambem he $GH = AD$; e o angulo EHG = angulo FHB = angulo ADB : logo será $AD = CD$; e $ADB = BDC$: e por conseguinte BD será perpendicular no meio de AC. (15).

27. *Coroll.* Reciprocamente: em todo o triangulo sph. isosceles o arco, que se levantar perpendicular no meio do lado opposto ao angulo formado pelos lados iguaes, passará pelo vertice do dito angulo; e o dividirá em duas partes iguaes. Por quanto o arco, que assim dividir o angulo, será perpendicular no meio do lado opposto; e ahi não póde haver mais do que hum arco perpendicular (15),

28.

28. THEOR. *Se em algum triangulo sph. forem iguaes dous angulos; os lados, que lhes são oppostos, serão iguaes. E se forem desiguaes dous angulos; será maior o lado opposto ao angulo maior.*

1.° Seja, fig. 10, o triangulo sph. ABC: e seja o angulo ACB = angulo BAC: digo que $AB = BC$.

Demonstr. Observe-se a construcção precedente, onde já fica provado ser $AB = GE$; e do mesmo modo se póde mostrar que he $BC = FE$; $AC = GF$. Ora o angulo BAC he $= EGF$; e o angulo $ACB = EFG$: logo será tambem $BAC = EFG$; e $ACB = EGF$, por ser $ACB = BAC$ por hypothese. Isto posto, he facil de ver que ajustando-se exactamente o arco AC sobre o seu igual FG; os arcos AB, e EF; BC, e GE tambem se ajustarão perfeitamente entre si, pela dita igualdade dos angulos: logo será $AB = FE$; e logo $AB = BC$, por ser $BC = FE$.

2.° Seja porém, fig. 11, o angulo $ACB >$ angulo BAC: digo que $AB > BC$.

Demonstr. Faça-se o angulo $ACD = BAC$, cujo lado CD encontrará AB em hum ponto D entre A, e B; por quanto não póde cortar BC (3, e 24): será AD

=

$= DC$, como acabamos de ver: mas he $CD + DB > BC$ (25): logo tambem $AD + DB$, isto he $AB > BC$.

29. *Coroll.* Reciprocamente: se em algum triangulo sph. forem iguaes dous lados; os angulos, que lhes são oppostos, serão iguaes. E se forem desiguaes dous lados, será maior o angulo opposto ao lado maior.

30. THEOR. *Se a somma de quaesquer dous angulos de hum triangulo sph. for $= 180.°$; a somma dos lados oppostos será tambem $= 180.°$ Se for maior, será maior. Se for menor, será menor.*

Seja, fig. 12, o triangulo sph. ABC: e seja $ACB + BAC = 180.°$: digo que $AB + BC = 180.°$.

Demonstr. Continuem-se os lados AB, AC até concorrerem em D. Por ser $BAC = BDC$; e $ACB + BCD = 180.°$ (15); será tambem $ACB + BDC = ACB + BCD$: e logo $BDC = BCD$: mas então he $BC = BD$ (28): logo ajuntando a huma e outra parte AB, teremos $AB + BC = AB + BD$: mas $AB + BD = 180.°$; logo &c.

A 2.ª e 3.ª parte demonstrão-se do mesmo modo.

31. *Coroll.* Reciprocamente: se a somma de quaesquer dous lados de hum triangulo sph. for $= 180°$, a somma dos angulos oppostos será tambem $= 180.°$. Se for maior, será maior. Se for menor, será menor.

32. THEOR. *Em todo o triangulo sph. qualquer dos angulos he $< 180.°$: a differença entre quaesquer dous $<$ o supplemento do terceiro: e a somma de todos tres $> 180.°$*

Seja, fig. 13, o triangulo sph. ABC: digo que qualquer dos angulos, por ex. ACB he $< 180.°$: a differença entre quaesquer dous, v. g. $ABC - BAC < 180.° - ACB$; e a somma de todos tres $ABC + BAC + ACB > 180.°$

Demonstr. 1.° Pois cada hum dos lados do triangulo he $< 180.°$; produzidos AB, BC concorrerão em D: mas he $ACB + ACD = 180.°$: logo $ACB < 180.°$

2.° Seja $ABC > BAC$: faça-se $BAE = ABC$: será $ABC - BAC = CAE$; e $AE = BE$. Logo $CE < AE$: logo $CAE < ACE$ (29): isto he $ABC - BAC < 180.° - ACB$.

3.°

3.° No triangulo ACD he $ACD - ADC < 180.° - CAD$; ou $ACD - ABC < BAC$: logo $ACD < ABC + BAC$; isto he $ABC + BAC > 180.° - ACB$: e logo $ABC + BAC + ACB > 180.°$

33. *Coroll.* Hum triangulo sph. póde ter dous, ou tres angulos rectos : dous, ou tres angulos obtusos. Quando tem dous angulos rectos, o vertice do terceiro angulo he polo do lado opposto. (20). Os triangulos sph. se distinguem, quanto aos seus angulos, com os mesmos nomes, que demos aos triangulos rectilineos.

Da igualdade dos triangulos sph.

34. Theor. *Dous triangulos sph. são iguaes.*

1.° *Quando dous lados de hum são respectivamente iguaes a dous lados do outro, e similhantemente dispostos; e iguaes os angulos formados por esses dous lados.*

2.° *Quando dous angulos de hum são respectivamente iguaes a dous angulos do outro, e similhantemente dispostos; e iguaes os lados adjacentes a esses dous angulos.*

3.°

3.° *Quando os tres lados de hum são respectivamente iguaes aos tres lados do outro, e similhantemente dispostos.*

4.° *Quando os tres angulos de hum são respectivamente iguaes aos tres angulos do outro, e similhantemente dispostos.*

Os primeiros tres casos demonstrão-se, como os mesmos tres da igualdade dos triangulos rectilineos. O 4.° demonstra-se pela maneira seguinte.

Sejão, fig. 14, os triangulos sph. ABC, abc : e sejão os angulos $BAC = bac$; $ABC = abc$; $ACB = acb$: digo que o triangulo ABC he igual ao triangulo abc.

Demonstr. Se os triangulos não são iguaes, não será $AB = ab$; porque, sendo, está demonstrada a igualdade dos triangulos pelo 2.° caso. Seja pois $AB > ab$: corte-se $AB' = ab$: e faça-se no ponto B' hum angulo $= abc$; que será $AB'C'$, ou $AB'C''$, conforme o lado $B'C'$, ou $B'C''$ cortar, ou não o lado BC: será então o triangulo $AB'C'$, ou $AB'C''$ igual ao triangulo abc; e por tanto o angulo $AB'C'$, ou $AB'C'' = ABC$; e $AC'B'$, ou $AC''B' = ACB$. Seja o triangulo $AB'C'$: serão os angulos $D'BB' + BB'D' = 180.°$, por ser $AB'C' = ABC$, e $AB'C' +$

$BB'C'$

$BB'C' = 180.°$: logo $D'B' + D'B = 180.°$ (30) : e pela mesma razão $D'C' + D'C = 180.°$; donde $D'B' + DC' + D'B + D'C = 360.°$: isto he $B'C' + BC = 360.°$: o que he impossivel (24). Pois então seja o triangulo $AB'C''$: produzão-se os lados BC, $B'C''$ até concorrerem em D : será o angulo $AB'D = ABD$, como tendo supplementos iguaes : logo $DBB' + BB'D = 180.°$; e por isso $DB + DB' = 180.°$: mas tambem, por ser $DC''C + DCC'' = 180.°$, he $DC + DC'' = 180.°$: logo $DB + DB' = DC + DC''$: manifesto absurdo.

35. *Schol.* 1.° Quando os dous triangulos sph. não tem as suas partes similhantemente dispostas, não se podem sobrepor hum ao outro. Com tudo, ainda que se não ajustem em figura, nem por isso deixão de ter todas as suas partes respectivamente iguaes, quando nelles se verifique algum dos quatro casos. Examinemos o 1.°

Sejão, fig. 15, os triangulos sph. ABC, abc : e seja $AB = ab$; $BC = bc$; e o angulo ABC = angulo abc : digo que $AC = ac$; o angulo BAC = angulo bac; o angulo BCA = angulo bca; e a área $ABCA$ = área $abca$.

De-

Demonstr. Produza-se AC até completar a circunferencia $ACDFA$; e AB, BC até concorrerem em E. Provar-se-há, como em o n.º 28, ser $AB = DE$; $BC = FE$; $AC = DF$; o angulo $ABC = FED$: o angulo $BAC = EDF$; e o angulo $ACB = DFE$. Pelo que, nos triangulos DEF, abc, será tambem $DE = ab$; $EF = bc$; e o angulo $E =$ angulo b. Mas estes dous triangulos são absolutamente iguaes, por quanto se podem ajustar perfeitamente entre si; logo he $ac = DF = AC$; o angulo $a = EDF = BAC$; e o angulo $c = DFE = ACB$. Resta pois só mostrar a igualdade das áreas.

Sejão, fig. 16, os triangulos ABC, abc os propostos. Circunscrevão-se-lhes (9) os circulos $ADEFA$, $adefa$, cada hum ao seu: he facil de ver que estes circulos são iguaes, como circunscriptos a triangulos, cujos arcos, e por conseguinte as cordas são iguaes: logo serão iguaes entre si os segmentos sph., de que elles são bases. Isto posto, applique-se o ponto A sobre o ponto b; e ajuste-se o arco ADB sobre o arco bda; o ponto B cahirá em a, por ser $ADB = adb$ (40 Geom.); e o lado AB se ajustará sobre o lado ba, por ser cada hum $< 180.°$

(3): logo o espaço *ADBA* cobrirá exactamente o espaço *adba*; e logo as áreas destes espaços serão iguaes entre si. Do mesmo modo se mostrará a igualdade respectiva dos outros espaços *AFCA*, e *afca*; *BECB*, e *becb*. Ora as áreas dos dous segmentos sph. são iguaes entre si pela igualdade dos segmentos, e compoem-se desses espaços respectivamente iguaes, e de hum triangulo sph. cada huma: logo as áreas destes dous triangulos sph. serão tambem iguaes entre si.

36. *Schol.* 2°. Póde tambem hum triangulo sph. ser, ou não igual a outro triangulo sph. em todas as suas partes.

1.° Quando dous lados de hum forem respectivamente iguaes a dous lados do outro; e igual hum dos angulos oppostos a lados iguaes.

2.° Quando dous angulos de hum forem respectivamente iguaes a dous angulos do outro, e igual hum dos lados oppostos a angulos iguaes.

Com effeito, fig. 11, nos triangulos *ABC*; *BCD*, he o angulo *B* commum; o lado *BC* tambem commum: e póde ser $AC = CD$; ou o angulo $A =$ angulo *DCB*; e com tudo os triangulos são evidentemente desiguaes.

Da

Da área dos triangulos sph.

37. THEOR. *A área de qualquer triangulo sph. he para a área da sphera, como ametade do excesso da somma dos tres angulos do triangulo sobre 180°., he para 360°.*

Seja, fig. 15, o triangulo sph. *ABC*: denote *S* a somma dos tres angulos; *a* a área; e *A* a área da sphera: digo que $a : A :: \frac{S - 180.°}{2} : 360.°$

Demonstr. Segundo a construcção, que fizemos em o n.° 35, e do que alli fica dito, concluimos que os triangulos *ABC*, *DEF* erão iguaes em todas as suas partes. Isto posto: por ser a área da lunula sph. *FACB* para a área da sphera, como o angulo *ACB* para 360.° (13): e tambem a área da lunula sph. *DCAB* para a área da sphera, como o angulo *BAC* para 360.°: e finalmente a área da lunula sph. *EFBD*, ou a do triangulo *BAC* mais a do triangulo *FBD* para a área da mesma sphera, como o angulo *FBD*, ou *ABC* para 360.°: será (sommando todos os antecedentes) a área do hemispherio *ACDFA* mais odobro da do tri-

triangulo *ABC* para a área da sphera; como a somma dos tres angulos do triangulo para 360.°: isto he, $\frac{1}{2} A + 2a : A :: S : 360.°$; ou $\frac{1}{2} A + 2a : \frac{1}{2} A :: S : 180°$; donde $2a : \frac{1}{2} A :: S - 180.° : 180.°$ e logo $a : A :: \frac{S - 180.°}{2} : 360.°$

38. *Coroll.* Represente S a semi-somma dos tres angulos de hum triangulo sph., e A a área da sphera; será a área do triangulo $= \frac{S - 90}{360} \times A$.

F I M.

NO-

NOTAS.

Sobre algumas Proposições dos Elementos.

I.

NAs pag. 137, 138, aonde se lê *assignado*, lêa-se *assignada*.

II.

Ao Enunciado do Theor. n.° 228 accrescente-se: *e não estiverem todas em hum só plano.*

III.

Concluimos em o n.° 264, fundados no axioma, ser a superficie da Sphera maior que a do polyedro inscripto, e menor que a do circunscripto: mas poderá este caso parecer talvez inapplicavel ao dito axioma, que só respeita as superficies, que terminão nas mesmas linhas.

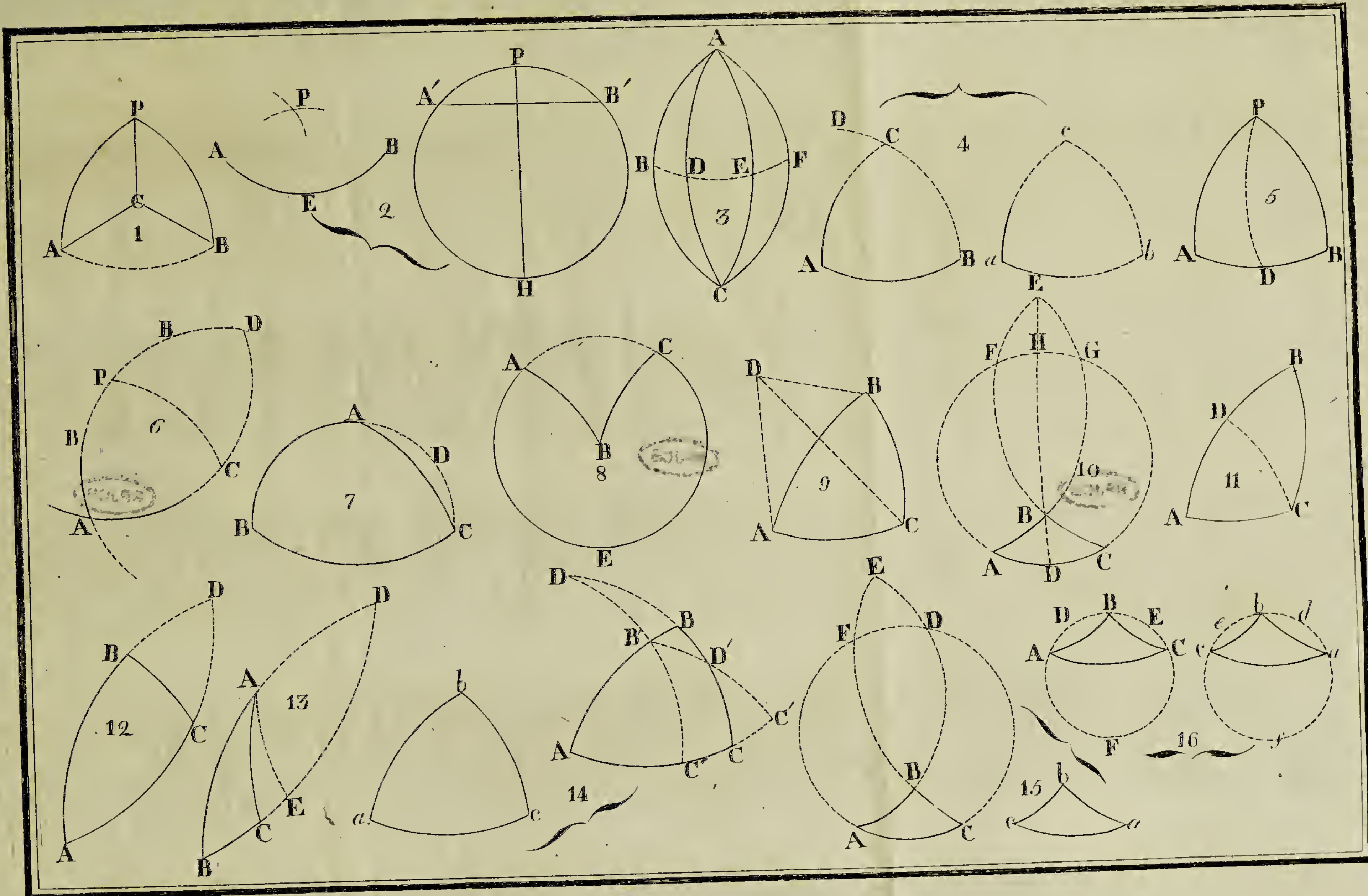
Para remover toda a duvida, bastará advertir, que tirando hum plano pelos pontos, em que huma das pyramides conicas do corpo de revolução inscripto, ou circunscripto (263) toca a Sphera, terminarão de huma, e outra parte na circunferencia da secção duas superficies, das quaes pelo axioma he a exterior maior, que a interior; e por conseguinte a somma das primeiras maior

que

que a somma das segundas ; isto he a superficie spherica maior que a conica inscripta , e menor que a circunscripta. Ora attendendo á formação do polyedro não he menos evidente que nos lados do polygono circunvoluto terminão tambem de huma , e outra parte duas superficies , huma pertencente ao polyedro , e a outra ao corpo conico : logo pelo dito axioma he a superficie do polyedro maior que a conica inscripta , e menor que a circunscripta ; e logo com mais razão maior que a da Sphera inscripta , e menor que a da circunscripta.

IV.

No Scholio n.° 311 , aonde se lê *por quanto* , lêa-se *que*.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16